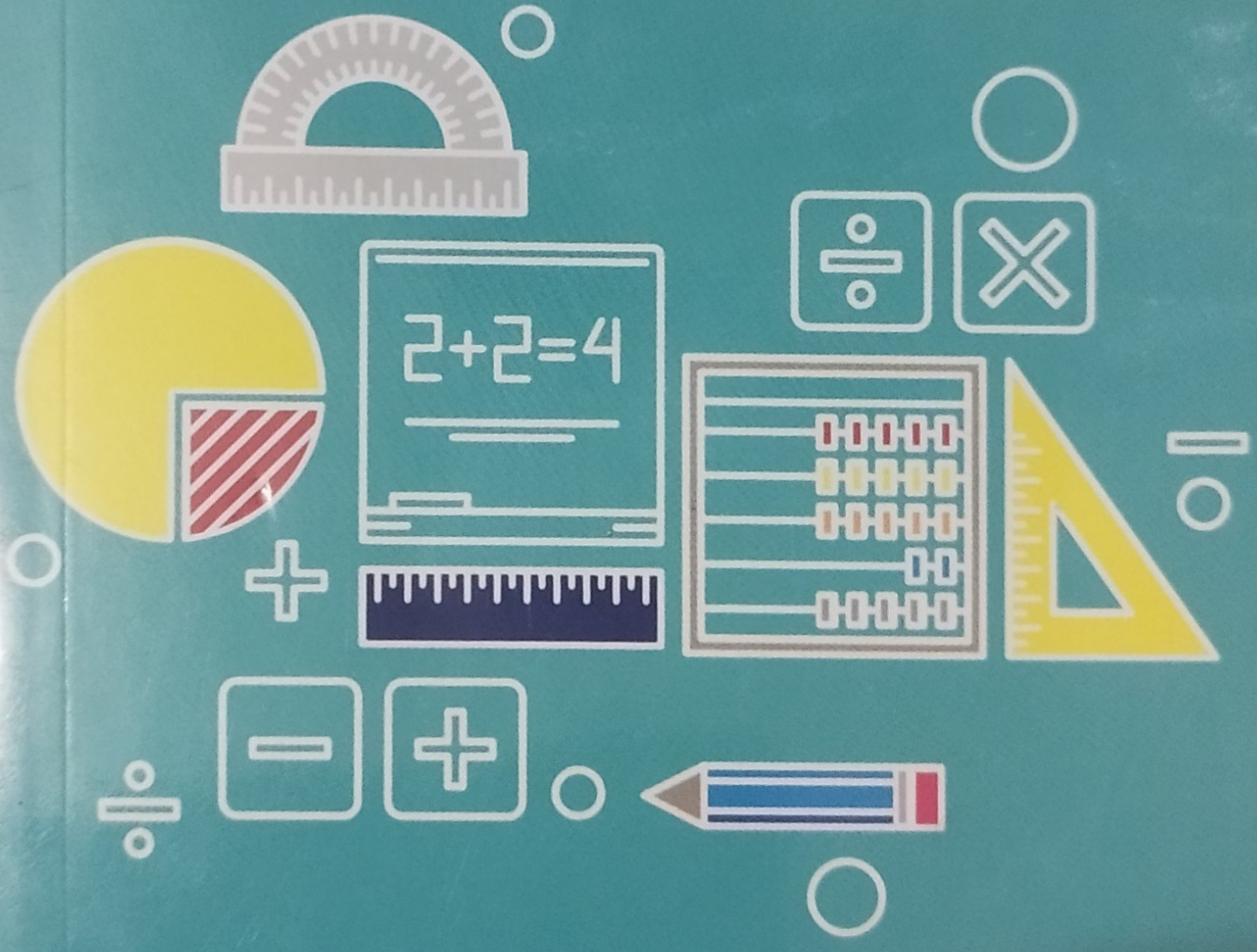
Daniel Vlăducu, Márta Kása

MEMORATOR MATEMATICĂ

clasele 5-8



EDITURA PARALELA 45
EDUCAȚIONAL

DANIEL VLĂDUCU
MÁRTA KÁSA

MEMORATOR DE MATEMATICĂ

pentru clasele V-VIII

Ediţia a VI-a

Editura Paralela 45

Editura Paralela 45

Redactare: Daniel Mitran
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
VLĂDUCU, DANIEL
Memorator de matematică pentru clasele V-VIII /
Daniel Vlăducu, Márta Kása. – Ed. a 6-a. – Pitești : Paralela 45, 2024
ISBN 978-973-47-4166-3

I. Kása, Márta

51

Copyright © Editura Paralela 45, 2024
Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate, iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

Cuprins

ALGEBRĂ

MULŢIMEA NUMERELOR NATURALE (N) 5
- Operaţii cu numere naturale 5

MULŢIMI 7
- Relaţii între elemente şi mulţimi 7
- Relaţii între mulţimi 8
- Operaţii cu mulţimi 8

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE 8

NUMERE RAŢIONALE 11
- Fracţia 11
- Operaţii cu fracţii 13
- Fracţii zecimale 17

NUMERE IRAŢIONALE 17
- Operaţii cu radicali 18

MULŢIMEA NUMERELOR REALE (R) 18
- Mulţimi de numere, notaţii 18

ECUAŢII, INECUAŢII 19
- Ecuaţia de gradul I cu o necunoscută 19
- Inecuaţia de gradul I cu o necunoscută 19
- Sisteme de două ecuaţii de gradul I cu două necunoscute 20
- Ecuaţia de gradul al II-lea cu o necunoscută 20

UNITĂŢI DE MĂSURĂ 21

RAPOARTE ŞI PROPORŢII 22
- Raport 22
- Proporţie 22

MULŢIMEA NUMERELOR ÎNTREGI (Z) 24
- Opusul unui număr întreg 24
- Modulul sau valoarea absolută 24
- Operaţii cu numere întregi 24

MEDII 26

CALCUL ALGEBRIC 27
- Monom (număr real reprezentat prin litere) 27

FUNCŢII 29

- Punctul 31
- Dreapta 31
- Puncte coliniare 31
- Segmentul de dreaptă 31
- Semidreapta 32
- Planul 32
- Spaţiul geometric 32

UNGHIUL 32
- Perpendiculare şi oblice 35

PROIECŢII ORTOGONALE 35

TRIUNGHIUL 36
- Linii importante într-un triunghi 37
- Clasificarea triunghiurilor după măsura unghiurilor 38
- Clasificarea triunghiurilor după lungimile laturilor 39
- Congruenţa şi asemănarea triunghiurilor oarecare 40
- Relaţii metrice în triunghi 41

PATRULATERE 45

CERCUL 48

POLIGOANE 51

PUNCTE, DREPTE, PLANE 52

POLIEDRE 58
- Prisma 58
- Paralelipipedul 58
- Cubul 59
- Tetraedrul 59
- Piramida 60
- Trunchiul de piramidă 61

CORPURI ROTUNDE 62
- Cilindrul circular drept 62
- Conul circular drept 62
- Trunchiul de con circular drept 62
- Sfera 63

ALGEBRĂ

MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE (N)

• Cifre romane (scrierea nepoziţională):

I – 1	V – 5
X – 10	L – 50
C – 100	D – 500
M – 1000	

• Cifre arabe (scrierea poziţională): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

• Numărul natural de două cifre $\overline{ab}$, unde $a \neq 0$, $\overline{ab} = 10a + b$.

• Număr natural de trei cifre $\overline{abc}$, unde $a \neq 0$, $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

• Numere consecutive – numerele care au diferenţa egală cu 1.

• Număr par – numărul care dă restul 0 la împărţirea cu 2 ($2n$ – număr par).

• Număr impar – numărul care dă restul 1 la împărţirea cu 2 ($2n + 1$ – număr impar).

• Mulţimea $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ se numeşte mulţimea numerelor naturale.

OPERAŢII CU NUMERE NATURALE

Adunarea

Oricare ar fi a, b, numere naturale, există c număr natural astfel încât: $a + b = c$, unde a, b – termeni; c – sumă.

Proprietăţi:

1. Comutativitatea:
   $a + b = b + a$, oricare ar fi a, b numere naturale
2. Asociativitatea:
   $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi a, b, c numere naturale
3. Numărul 0 este element neutru faţă de adunare:
   $a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi a număr natural

Scăderea

Oricare ar fi a, b, numere naturale, $a \geq b$, există c număr natural astfel încât:

$a - b = c$, unde a – descăzut; b – scăzător; c – diferenţă.

Înmulţirea

Oricare ar fi a, b, numere naturale, există c număr natural astfel încât: $a \cdot b = c$, unde a, b – factori; c – produs.

Proprietăţi:

1. Comutativitatea:

   $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi a, b, numere naturale

2. Asociativitatea:

   $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi a, b, c numere naturale

3. Distributivitatea:

   $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$, oricare ar fi a, b, c numere naturale

4. Numărul 1 este element neutru faţă de înmulţire:

   $a \cdot 1 = a$, oricare ar fi a număr natural

Împărţirea

Fiind date două numere naturale d şi i, $i \neq 0$, se poate scrie:

$d : i = c + r : i$, unde $0 \leq r < i$

Ordinea efectuării operaţiilor

Dacă nu sunt paranteze, se efectuează în următoarea ordine:

- înmulţirea şi împărţirea (operaţii de ordinul al doilea);
- adunarea şi scăderea (operaţii de ordinul întâi).

Dacă sunt paranteze, se efectuează calculele:

- din parantezele rotunde (mici);
- din parantezele drepte (mari);
- din acolade.

Teorema împărţirii cu rest

Oricare ar fi două numere naturale d şi i, $i \neq 0$, există două numere naturale c şi r, $0 \leq r < i$, astfel încât: $d = i \cdot c + r$.

Puterea unui număr natural

• Dacă a este un număr natural, atunci puterea a n-a a numărului natural a se notează cu a^n şi este $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ ori}}$, unde a este baza puterii, iar n exponentul ei.

Reguli de calcul cu puteri

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

$a^n : b^n = (a : b)^n$

Prin definiţie

$a^0 = 1$

$1^n = 1$

$0^n = 0$

• Numărul a^2 se numeşte *pătrat perfect.*

• Numărul a^3 se numeşte *cub perfect.*

MULŢIMI

Definiţie: Prin mulţime înţelegem o colecţie de obiecte distincte care au aceeaşi proprietate sau aceleaşi proprietăţi.

Observaţie: Obiectele din care este formată mulţimea sau elementele mulţimii apar o singură dată, indiferent de ordinea în care sunt considerate.

Notaţii: $A, B, C, \ldots X, \{a, b, c\}, \{x \mid x > 0\}$.

Mulţimea vidă „$\varnothing$" este mulţimea fără niciun element.

Numărul de elemente ale unei mulţimi A se numeşte **cardinalul mulţimii A** şi se notează card A.

RELAŢII ÎNTRE ELEMENTE ŞI MULŢIMI

Apartenenţa „$\in$"

Dacă un element a se regăseşte în mulţimea E, spunem că a aparţine mulţimii E şi notăm: $a \in E$. În caz contrar notăm $a \notin E$.

Relații între mulțimi

Mulțimi egale „=”
Două mulțimi A și B sunt egale atunci când sunt formate din aceleași elemente: $A = B$.
Mulțimi incluse „⊂”
Mulțimea A este inclusă în mulțimea B atunci când orice element din A se află și în B: $A \subset B$.

Operații cu mulțimi

Reuniunea „∪”: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$ reprezintă o nouă mulțime care conține toate elementele mulțimilor A și B comune și necomune luate o singură dată.
Intersecția „∩”: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$ reprezintă o nouă mulțime care conține toate elementele comune mulțimilor A și B.
Mulțimi disjuncte
Două mulțimi A și B sunt disjuncte dacă nu au niciun element comun: $A \cap B = \varnothing$.
Diferența „\” sau „–”: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$ reprezintă o nouă mulțime formată din elementele lui A care nu sunt în B.

DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

Definiție: Un număr natural a se divide cu un număr natural b dacă există un număr natural c, astfel încât $a = b \cdot c$. Spunem că „a este divizibil cu b” sau că „b divide a”.
În acest caz, a este un multiplu al lui b și b este un divizor al lui a.

Notații: $a \vdots b$ (a este divizibil cu b) sau $b \mid a$ (b divide a).

Proprietăți:
1. Orice număr natural este divizibil cu 1 și cu numărul însuși, ce reprezintă divizorii improprii ai acelui număr.
2. Zero este divizibil cu orice număr natural: $a \mid 0$.

3. Dacă $b \mid a$ şi $a \mid b$, atunci $a = b$, oricare ar fi $a, b \in \mathbf{N}$.
4. Dacă $a \mid b$ şi $b \mid c$, atunci $a \mid c$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{N}$.
5. Dacă $m \mid a$ şi $m \mid b$, atunci $m \mid a + b$, oricare ar fi $m, a, b \in \mathbf{N}$.
6. Dacă $m \mid a$ şi $m \mid b$, atunci $m \mid a - b$, oricare ar fi $m, a, b \in \mathbf{N}$; $a \geq b$.
7. Dacă $m \mid a$ şi $m \mid b$, atunci $m \mid a \cdot b$, oricare ar fi $m, a, b \in \mathbf{N}$.

Mulţimea divizorilor

Notaţie: D_a = mulţimea tuturor numerelor care îl divid pe a.

Exemplu: $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Mulţimea divizorilor improprii ai lui 12 = $\{1, 12\}$.

Mulţimea divizorilor proprii ai lui 12 = $\{2, 3, 4, 6\}$.

Un număr natural, diferit de 1, ce are numai divizori improprii se numeşte număr prim.

Mulţimea multiplilor

Notaţie: M_a = mulţimea tuturor multiplilor lui a.

Exemplu: $M_2 = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$, $n \in \mathbf{N}$.

Criterii de divizibilitate

- Un număr este divizibil cu:
  - 2, dacă cifra unităţilor este 0, 2, 4, 6, 8;
  - 3, dacă suma cifrelor este divizibilă cu 3;
  - 4, dacă ultimele două cifre formează (în ordinea în care sunt aşezate) un număr divizibil cu 4 sau ambele sunt zerouri;
  - 5, dacă ultima cifră a numărului este 0 sau 5;
  - 6, dacă numărul este divizibil cu 2 şi cu 3;
  - 8, dacă ultimele trei cifre formează (în ordinea în care sunt aşezate) un număr divizibil cu 8 sau toate sunt zerouri;
  - 9, dacă suma cifrelor este divizibilă cu 9;
  - 11 – se adună cifrele de ordin cu soţ şi separat cele de ordin fără soţ. Dacă diferenţa acestor sume este 0, 11 sau un număr divizibil cu 11, atunci şi numărul este divizibil cu 11;
  - 25, dacă ultimele două cifre formează (în ordinea în care sunt aşezate) un număr divizibil cu 25 sau ambele sunt zerouri;

- 125, dacă ultimele trei cifre formează (în ordinea în care sunt aşezate) un număr divizibil cu 125 sau toate sunt zerouri;
- 10^n, dacă numărul se termină cu n zerouri, atunci numărul se divide cu $2^n \cdot 5^n$.

• Divizibilitatea cu 7, 11 şi 13:
- Un număr este divizibil cu 7, 11 sau 13 dacă diferenţa dintre numărul (A), format de ultimele trei cifre ale numărului dat, şi numărul (B), format de celelalte cifre din faţă, este egală cu zero sau diferenţa este divizibilă prin 7, 11 sau 13.

Exemple:

1) $N = 110\,253 \Rightarrow A = 253; B = 110; A - B = 143$

143 este divizibil cu 11 şi 13. Deci, şi N este divizibil cu 11 şi 13.

2) $N = 161\,161 \Rightarrow A = 161; B = 161; A - B = 0$

Deci, şi N este divizibil cu 7, 11 si 13.

Număr prim

Definiţie: Numărul ai cărui singuri divizori sunt 1 şi el însuşi.

Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.)

Definiţie: C.m.m.d.c. a două sau mai multor numere naturale este cel mai mare număr natural care divide pe fiecare dintre ele.

Notaţie: $(18, 27) = 9$ sau c.m.m.d.c.$(18, 27) = 9$

Două numere fără divizori proprii comuni se numesc prime între ele.

Proprietate: Dacă un număr se divide cu două numere prime între ele, acel număr se divide şi cu produsul lor.

Metode de aflare a c.m.m.d.c.:

1. Descompunerea în factori primi:
   - se descompun numerele în factori primi;
   - se înmulţesc între ei numai factorii comuni la puterea cea mai mică.
2. Algoritmul lui Euclid (numai pentru două numere):
   - se împarte cel mai mare la cel mai mic (se obţine un rest R_1);
   - se împarte cel mic la restul obţinut la prima împărţire (R_1) şi se obţine un nou rest R_2;

- se împarte R_1 la R_2 şi se obţine restul R_3;
- se împarte R_2 la R_3 ş.a.m.d. până se obţine restul 0;
- ultimul rest nenul este c.m.m.d.c.

Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.)

Definiţie: C.m.m.m.c. a două sau mai multor numere naturale este cel mai mic număr natural, diferit de 0, care se divide cu fiecare dintre ele.

Notaţie: [4, 6] = 12 sau c.m.m.m.c.(4, 6) = 12

Metoda de aflare a c.m.m.m.c.: Se descompun numerele în factori primi şi se iau factorii primi comuni şi necomuni, o singură dată, la puterea cea mai mare şi se înmulţesc între ei.

Numere prime între ele

Definiţie: Numerele care au drept c.m.m.d.c. pe 1.

NUMERE RAŢIONALE

FRACŢIA

$\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbf{N}, b \neq 0$; a – numărătorul fracţiei;

b – numitorul fracţiei.

Linia de fracţie semnifică operaţia de împărţire.

Clasificarea fracţiilor:

• *fracţii subunitare* = fracţii cu numărătorul mai mic decât numitorul (reprezintă numere mai mici ca 1);

Exemple: $\frac{1}{5}; \frac{17}{20}; \frac{3}{100}$.

• *fracţii echiunitare* = fracţii cu numărătorul egal cu numitorul (reprezintă numere egale cu 1);

Exemple: $\frac{4}{4}=1; \frac{17}{17}=1; \frac{98}{98}=1$.

• *fracţii supraunitare* = fracţii cu numărătorul mai mare decât numitorul (reprezintă numere mai mari decât 1);

Exemple: $\frac{6}{5}; \frac{11}{6}; \frac{101}{25}$.

Simplificarea unei fracţii

Se face prin împărţirea numărătorului şi a numitorului cu un divizor comun (c.m.m.d.c.).

$$\frac{a}{b} \overset{(d}{=} \frac{a:d}{b:d},\ d \mid a \text{ şi } d \mid b, d \neq 0$$

Amplificarea unei fracţii

Se face prin înmulţirea numărătorului şi a numitorului cu acelaşi număr, diferit de 0.

$$\frac{a}{b} \overset{c)}{=} \frac{a \cdot c}{b \cdot c},\ c \neq 0$$

Fracţia ireductibilă

Definiţie: Fracţia în care numărătorul şi numitorul sunt numere prime între ele (care a fost simplificată cu c.m.m.d.c. al numărătorului şi numitorului).

$$\frac{a}{b}, \text{ cu } (a, b) = 1$$

Inversa unei fracţii

Inversa fracţiei $\frac{a}{b}$ este $\frac{b}{a}, a, b \in \mathbf{N}^*$.

Opusa unei fracţii

Opusa fracţiei $\frac{a}{b}$ este $\left(-\frac{a}{b}\right), a, b \in \mathbf{N}^*$.

Aducerea fracţiilor la acelaşi numitor

Se face prin aflarea c.m.m.d.c. al numerelor de la numitor, care devine numitorul comun. Se amplifică fiecare fracţie cu câtul dintre numitorul comun (cel nou) şi numitorul fracţiei.

Compararea a două fracţii

$$\frac{a}{b} \text{ şi } \frac{c}{b}, a > c \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \text{ şi } \frac{a}{c}, b < c \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a}{c}$$

$$\frac{m}{n} \text{ şi } \frac{p}{q}, mq > np \Rightarrow \frac{m}{n} > \frac{p}{q}$$

Mulţimea numerelor raţionale

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^* \right\}$$

OPERAŢII CU FRACŢII

Adunarea

• Dacă fracţiile au acelaşi numitor, suma lor este dată de o fracţie ce are la numărător suma numărătorilor, iar la numitor, numitorul comun.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a+b+c}{m}$$

• Dacă fracţiile au numitori diferiţi, se aduc la acelaşi numitor, apoi se însumează numărătorii obţinuţi, iar la numitor se pune numitorul comun.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

Proprietăţile adunării:

1. Adunarea este asociativă şi comutativă:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right); \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b},$$

oricare ar fi $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in \mathbf{Q}$.

2. Numărul raţional 0 este element neutru al adunării:

$$\frac{a}{b}+0=0+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\text{, oricare ar fi } \frac{a}{b}\in \mathbf{Q}.$$

Scoaterea întregilor dintr-o fracţie

Se face împărţind numărătorul la numitor, conform formulei:

$$\frac{D}{I}=C+\frac{R}{I},$$

unde C – partea întreagă, R – restul, I – împărţitorul, $R<I$

Introducerea întregilor în fracţie

Este operaţia prin care se face suma dintre un număr întreg şi o fracţie. Se înmulţeşte întregul cu numitorul fracţiei, rezultatul se adună la numărător, numitorul rămâne neschimbat.

$$a\frac{b}{c}=a+\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c}$$

Scăderea

• Dacă fracţiile au acelaşi numitor, se scad numărătorii şi se păstrează numitorul.

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}$$

• Dacă fracţiile au numitori diferiţi, se aduc la acelaşi numitor, se scad numărătorii obţinuţi, iar la numitor se pune numitorul comun.

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d};\qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\left(-\frac{c}{d}\right)$$

Înmulţirea

• Un număr natural se înmulţeşte cu o fracţie, înmulţind acel număr cu numărătorul fracţiei şi păstrând numitorul.

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}$$

• Produsul a două fracţii este tot o fracţie ce are la numărător produsul numărătorilor, iar la numitor, produsul numitorilor.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

• Valoarea unei fracţii dintr-un număr natural se află înmulţind fracţia cu numărul.

$$\frac{a}{b}\text{ din }c\text{ este }\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b}$$

• Valoarea unei fracţii dintr-o fracţie se află înmulţind cele două fracţii.

$$\frac{a}{b}\text{ din }\frac{c}{d}\text{ este }\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot b}{c\cdot d}$$

Proprietăţile înmulţirii:

Oricare ar fi $\frac{a}{b},\frac{c}{d},\frac{e}{f}\in\mathbf{Q}$:

1. Înmulţirea este comutativă şi asociativă.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b};\qquad\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$$

2. Numărul 1 nu operează la înmulţire (element neutru).

$$\frac{a}{b}\cdot 1=1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

3. Înmulţirea este distributivă faţă de adunarea şi scăderea numerelor raţionale.

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f};\qquad\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$$

4. Produsul unei fracţii cu inversa sa este egal cu unu.

$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$, inversa fracţiei $\frac{a}{b}$ fiind fracţia $\frac{b}{a}$.

Împărţirea

• Împărţirea a două fracţii se face prin înmulţirea primei fracţii cu inversa celei de-a doua.

$$\frac{a}{b}:n=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{n}=\frac{a}{b\cdot n},\ n\in \mathbf{Z}^*$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Puteri cu exponent număr natural

A^n sau $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, unde $\frac{a}{b}$ este baza, iar n exponentul puterii, $b\neq 0$.

$A^0=1; A^1=A; A^2=A\cdot A; A^3=A\cdot A\cdot A$; etc.

- puterea n: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{\text{de } n \text{ ori}}=\frac{a^n}{b^n}$

- puterea 1 şi 0: $\left(\frac{a}{b}\right)^1=\frac{a}{b}; \left(\frac{a}{b}\right)^0=\frac{a^0}{b^0}=\frac{1}{1}=1, a, b\neq 0$

- produs de puteri: $\left(\frac{a}{b}\right)^m\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}=\frac{a^{m+n}}{b^{m+n}}; b\neq 0; m, n\in \mathbf{N}$

- putere la putere: $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot n}=\frac{a^{m\cdot n}}{b^{m\cdot n}}, b\neq 0$

- produs de numere la o putere:

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)^m=\left(\frac{a}{b}\right)^m\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^m\cdot\left(\frac{e}{f}\right)^m=\frac{a^m\cdot c^m\cdot e^m}{b^m\cdot d^m\cdot f^m}; b, d, f\neq 0; m, n\in \mathbf{N}$$

- împărţirea de puteri cu aceeaşi bază:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m:\left(\frac{a}{b}\right)^n=\left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}=\frac{a^{m-n}}{b^{m-n}}; a, b\neq 0; m, n\in \mathbf{N}; m\geq n$$

FRACȚII ZECIMALE

• Transformarea fracțiilor ordinare în fracții zecimale se face prin împărțirea numărătorului la numitor.

Se deosebesc:

- Fracții zecimale finite: 51,25
- Fracții zecimale periodice simple și mixte:
  15,(3) = 15,3333...; 5,497(31) = 5,497313131...

• Transformarea fracțiilor zecimale în fracții ordinare se face după următoarele reguli:

- Fracții zecimale finite:

$$18{,}5 = \frac{185}{10};\ 1{,}03 = \frac{103}{100};\ 97{,}173 = \frac{97173}{1000}$$

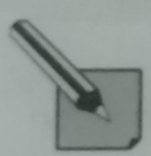
- Fracții zecimale periodice:

- simple:

$$1{,}(3) = \frac{13-1}{9} = \frac{4}{3};\ 16{,}(23) = \frac{1623-16}{99};\ 8{,}(935) = \frac{8935-8}{999}$$

- mixte:

$$1{,}7(3) = \frac{173-17}{90};\ 3{,}5(48) = \frac{3548-35}{990};\ 11{,}92(7) = \frac{11927-1192}{900}$$



NUMERE IRAȚIONALE

Definiție: Numere reale, care nu sunt raționale, deci care nu pot fi puse sub formă de fracție.

Exemple:

$\sqrt{2}$ = raportul dintre diagonala pătratului și latura lui (1,4142...)

π = raportul dintre lungimea și diametrul cercului (3,1415...)

Mulțimea numerelor raționale (**Q**) și mulțimea numerelor iraționale $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ formează mulțimea numerelor reale (**R**).

OPERAȚII CU RADICALI

Dacă $a \geq 0$; $b \geq 0$; $m \geq 2$; $n \in \mathbf{N}$, atunci:

- $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$;
- $\sqrt{x^2} = |x|$, pentru oricare $x \in \mathbf{Q}$;
- $\sqrt{x^2} = x$ pentru $x \geq 0$; $\sqrt{x^2} = -x$ pentru $x < 0$;
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; $\sqrt{a^2 + b^2} \neq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$;
- $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ $(x \geq 0)$;
- $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $(x \geq 0)$; $\sqrt{\frac{1}{y^2}} = \frac{1}{|y|}$, unde $y \neq 0$
- Scoaterea factorilor de sub radical: $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$.
- Introducerea factorilor sub radical:

$$a \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^3} \quad (a \geq 0); \qquad a \cdot \sqrt{b} = -\sqrt{a^2 \cdot b} \quad (a < 0, b \geq 0).$$

- Raționalizarea numitorilor se realizează prin amplificarea fracției cu radicalul de la numitor, după ce s-au scos factorii de sub radicali.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} \ (b > 0); \qquad \frac{a}{\sqrt{b} \pm \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} \mp \sqrt{c})}{b - c}, \ b, c > 0, b \neq \pm c$$

MULȚIMEA NUMERELOR REALE (R)

Mulțimea numerelor reale este formată din reuniunea mulțimii numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale.

MULȚIMI DE NUMERE, NOTAȚII

$\mathbf{N}$ = mulțimea numerelor naturale (întregi, pozitive, inclusiv 0).

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$;

$\mathbf{N}^*$ = $\mathbf{N}$ fără elementul 0.

$\mathbf{Z}$ = mulţimea numerelor întregi (negative sau pozitive).

$\mathbf{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$; $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} - \{0\}$;

$\mathbf{Z}_+ = \mathbf{N}$; $\mathbf{Z}_- = \{\ldots -3, -2, -1, 0\}$.

$\mathbf{Q}$ = mulţimea numerelor raţionale (care pot fi puse sub formă de fracţie).

$$\mathbf{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{m}{n};\ m, n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0 \right\};\quad \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} - \{0\};$$

$$\mathbf{Q}_+ = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0 \right\};\qquad \mathbf{Q}_- = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_+.$$

$\mathbf{R}$ = mulţimea numerelor reale cuprinde mulţimile $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, precum şi numerele iraţionale.

$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$

ECUAŢII, INECUAŢII

ECUAŢIA DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ

Forma generală: $ax + b = 0,\ a \neq 0;\ a, b \in \mathbf{R}$

a = coeficientul necunoscutei; b = termenul liber.

Metodă de rezolvare: $ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$, unde $a \neq 0$.

Proprietăţi:

1. Ecuaţia de gradul I cu o necunoscută are soluţie unică, pentru $a \neq 0$.
2. Ecuaţiile care au aceeaşi soluţie sunt echivalente.

INECUAŢIA DE GRADUL I CU O NECUNOSCUTĂ

Forma generală:

$ax + b > 0$ (semnul poate fi $>, \geq, <, \leq$), unde $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$

Metodă de rezolvare: $ax + b > 0 \Rightarrow ax > -b \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$, unde $a \neq 0$

SISTEME DE DOUĂ ECUAŢII DE GRADUL I CU DOUĂ NECUNOSCUTE

Forma generală: $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \quad (1) \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \quad (2) \end{cases}$

Metode de rezolvare:

1. **Metoda substituţiei** – se explicitează o necunoscută dintr-o ecuaţie şi se înlocuieşte în cealaltă rezultând o ecuaţie de gradul I cu o necunoscută, care se rezolvă determinându-se necunoscuta; apoi se determină necunoscuta explicitată iniţial.
2. **Metoda reducerii** – prin amplificări sau simplificări se obţine acelaşi coeficient şi de semne contrarii pentru aceeaşi necunoscută din cele două ecuaţii. Se adună ecuaţia (1) cu ecuaţia (2) şi se obţine o ecuaţie de gradul I cu o necunoscută (cealaltă a fost eliminată prin adunare). Se rezolvă această ecuaţie şi se obţine soluţia pentru o necunoscută. Înlocuind această valoare în oricare din cele două ecuaţii, determinăm cealaltă necunoscută.
3. **Metoda grafică** – fiecare ecuaţie de gradul I cu două necunoscute reprezintă în plan o dreaptă. Construim cele două drepte într-un sistem de axe de coordonate ortogonale şi determinăm coordonatele x şi y ale punctului de intersecţie; aceste valori ale lui x şi y reprezintă soluţia sistemului.

ECUAŢIA DE GRADUL AL II-LEA CU O NECUNOSCUTĂ

Forma generală: $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$; $a, b, c \in \mathbf{R}$

a, b = coeficienţii necunoscutei; c = termenul liber.

Metodă de rezolvare: $\Delta = b^2 - 4ac$,

Δ – determinantul, discriminantul sau rezolvantul ecuaţiei

Dacă $\Delta < 0$, ecuaţia nu are soluţii reale: $x_{1,2} \notin \mathbf{R}$.

Dacă $\Delta = 0$, ecuaţia are două soluţii reale şi egale: $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$.

Dacă $\Delta > 0$, ecuaţia are două soluţii reale şi distincte: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

UNITĂȚI DE MĂSURĂ

Pentru lungime – metrul (m)

1 dam = 10 m
1 hm = 100 m
1 km = 1 000 m

1 dm = 0,1 m
1 cm = 0,01 m
1 mm = 0,001 m

Pentru suprafață – metrul pătrat (m^2)

1 dam^2 = 100 m^2 = 1 ar
1 hm^2 = 10 000 m^2 = 1 ha (hectar)
1 km^2 = 1 000 000 m^2 = 10^6 m^2

1 dm^2 = 10^{-2} m^2
1 cm^2 = 10^{-4} m^2
1 mm^2 = 10^{-6} m^2

Pentru volum – metrul cub (m^3)

1 dam^3 = 10^3 m^3
1 hm^3 = 10^6 m^3
1 km^3 = 10^9 m^3

1 dm^3 = 10^{-3} m^3
1 cm^3 = 10^{-6} m^3
1 mm^3 = 10^{-9} m^3

Pentru capacitate – litrul (ℓ) = dm^3

1 dal = 10 ℓ
1 hl = 100 ℓ
1 kl = 1 000 ℓ

1 dl = 10^{-1} ℓ
1 cl = 10^{-2} ℓ
1 ml = 10^{-3} ℓ

Pentru masă – kilogramul (kg)

1 q = 100 kg
1 t = 1 000 kg
1 v = 10 000 kg = 10 t

1 hg = 100 g = 0,1 kg
1 dag = 10 g = 0,01 kg
1 g = 0,001 kg
1 dg = 0,1 g
1 cg = 0,01 g
1 mg = 0,001 g

Pentru timp – secunda (s)

1 min = 60 s
1 h = 60 min = 3 600 s
1 zi = 24 h = 86 400 s
1 săptămână = 7 zile
1 lună = 28, 29, 30 sau 31 de zile
1 an = 12 luni = 365 de zile (când luna februarie are 28 de zile)
= 366 de zile (când luna februarie are 29 de zile)
1 deceniu = 10 ani; 1 secol = 100 de ani; 1 mileniu = 1 000 de ani.

RAPOARTE ŞI PROPORŢII

RAPORT

Definiţie: Raportul a două mărimi a şi b de aceeaşi natură, măsurate cu aceeaşi unitate de măsură este câtul a/b şi reprezintă un număr.

PROPORŢIE

Definiţie: Egalitatea a două rapoarte.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\text{, unde } \begin{cases} a, d-\text{extremi} \\ b, c-\text{mezi} \end{cases} \text{ termenii proporţiei}$$

Proprietatea fundamentală a proporţiei: Produsul mezilor este egal cu produsul extremilor:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Observaţie: Dacă într-o proporţie $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $b = c$, avem $b^2 = a \cdot d$, adică $b = \sqrt{a \cdot d}$, $a > 0$, $b > 0$ şi b este media geometrică a numerelor a şi d.

Proporţii derivate

a) cu aceiaşi termeni:

- Dacă schimbăm mezii sau extremii între ei, se obţine o nouă proporţie:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \rightarrow \frac{d}{c}=\frac{b}{a} \text{ etc.}$$

- Inversa unei proporţii este tot o proporţie.

b) cu termeni schimbaţi:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm k \cdot b}{b}=\frac{c \pm k \cdot d}{d};\ \frac{a}{a \pm k \cdot b}=\frac{c}{c \pm k \cdot d},\ k \neq 0;$$

$$\frac{a \pm k \cdot c}{b \pm k \cdot d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\ \frac{a+k \cdot b}{a-k \cdot b}=\frac{c+k \cdot d}{c-k \cdot d},\ k \neq 0.$$

Şir de rapoarte egale (indiferent de numărul rapoartelor)

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}.$$

Aflarea unui termen necunoscut al unei proporţii

$$\frac{x}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow x=\frac{b\cdot c}{d};\qquad \frac{a}{x}=\frac{c}{d}\Rightarrow x=\frac{a\cdot d}{c};$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}\Rightarrow x=\frac{b\cdot c}{a};\qquad \frac{a}{b}=\frac{x}{d}\Rightarrow x=\frac{a\cdot d}{b}.$$

$$\text{un extrem}=\frac{\text{produsul mezilor}}{\text{celălalt extrem}};\quad \text{un mez}=\frac{\text{produsul extremilor}}{\text{celălalt mez}}.$$

Proporţionalitatea directă

$\{a, b, c, d, \ldots, z\}$ şi $\{a', b', c', d', \ldots, z'\}$ sunt direct proporţionale dacă $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=\ldots=\frac{z}{z'}=p$, unde p = coeficient de proporţionalitate.

Proporţionalitatea inversă

$\{a, b, c, d, \ldots, z\}$ şi $\{a', b', c', d', \ldots, z'\}$ sunt invers proporţionale dacă $a\cdot a'=b\cdot b'=c\cdot c'=\ldots=z\cdot z'$.

Regula de trei simplă

Dacă a ..... b

c ..... $x=?$

- pentru mărimi direct proporţionale rezultă: $\frac{a}{c}=\frac{b}{x}\Rightarrow x=\frac{b\cdot c}{a}$;
- pentru mărimi invers proporţionale rezultă: $c\cdot x=a\cdot b; x=\frac{a\cdot b}{c}$.

Regula de trei compusă

Se aplică atunci când în probleme intervin 3 sau mai multe mulţimi (fiecare având câte 2 elemente cunoscute, iar o mulţime cu un element cunoscut şi unul necunoscut). Determinarea necunoscutei se face aplicând succesiv „regula de trei simplă".

MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI (Z)

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

OPUSUL UNUI NUMĂR ÎNTREG

Numărul întreg	Opusul său
$(+a)$	$-(+a) = (-a)$
$(-a)$	$-(-a) = (+a)$

MODULUL SAU VALOAREA ABSOLUTĂ

Definiție: $|a|$ este distanța de la origine la punctul ce reprezintă numărul a, pe axa numerelor.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ dacă } a > 0 \\ 0, \text{ dacă } a = 0 \\ -a, \text{ dacă } a < 0 \end{cases}$$

Proprietăți:

$|a| \geq 0$; $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;

$|-a| = |a|$

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$

$|a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b$

$|x| = a \Rightarrow x = \pm a \ (a > 0)$

$$|x| \leq a \Rightarrow \begin{cases} x \geq -a \\ x \leq a \end{cases} \Rightarrow x \in [-a, a], a > 0$$

$|x| > a \Rightarrow x < -a$ sau $x > a \ (a > 0)$

$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

OPERAȚII CU NUMERE ÎNTREGI

Adunarea

• Două numere întregi a şi b care au aceleaşi semne se adună astfel: se adună modulele lor şi se dă sumei semnul comun.

• Două numere întregi care au semne contrare se adună astfel: se scade modulul mai mic din modulul mai mare şi se dă sumei semnul numărului ce are modulul mai mare.

Proprietăți:

1. Suma a două sau a mai multor numere întregi este:
   - comutativă: $a + b = b + a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbf{Z}$;
   - asociativă: $(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{Z}$;
   - admite ca element neutru pe 0: $a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi $a \in \mathbf{Z}$.
2. Suma dintre un număr întreg şi opusul său este egală cu 0:

$$a + (-a) = 0, \text{ oricare ar fi } a \in \mathbf{Z}.$$

Scăderea

• Două numere întregi se scad astfel: se adună descăzutul cu opusul scăzătorului. Rezultatul scăderii se numeşte diferenţă.

$$a - (+b) = a - b; \qquad a - (-b) = a + b.$$

Înmulţirea

Două numere întregi se înmulţesc astfel: se înmulţesc modulele celor două numere întregi, iar semnul produsului este dat de regula:

$$- \cdot - = +; \qquad - \cdot + = -; \qquad + \cdot + = +.$$

Proprietăți:

1. Înmulţirea este:
   - comutativă: $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbf{Z}$;
   - asociativă: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbf{Z}$;
   - distributivă faţă de adunare, respectiv faţă de scădere:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \text{ oricare ar fi } a, b, c \in \mathbf{Z};$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \text{ oricare ar fi } a, b, c \in \mathbf{Z}.$$

2. Numărul 1 este element neutru la înmulţire:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \text{ oricare ar fi } a \in \mathbf{Z}.$$

3. Orice număr întreg sau produs înmulţit cu 0 are ca rezultat tot 0:

$$a \cdot 0 = 0, \text{ oricare ar fi } a \in \mathbf{Z}.$$

4. Orice număr întreg înmulţit cu –1 dă opusul său:

$$a \cdot (-1) = -a; \qquad -a \cdot (-1) = +a, \text{ oricare ar fi } a \in \mathbf{Z}.$$

Împărţirea

La împărţirea a două numere întregi se procedează astfel: se împart modulele celor două numere întregi, iar semnul câtului este dat de regula:

$$-:-=+; \quad -:+=-; \quad +:+=+.$$

Împărţirea se face conform formulei:

$\frac{D}{I}=C \Rightarrow D=I\cdot C$, unde D = deîmpărţit; I = împărţitor; C = cât.

Puterea unui număr întreg, cu exponent număr natural

$a^0=1;\ a^1=a;\ a^2=a\cdot a;\ a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}},\ a\neq 0;$

$a^m\cdot a^n=a^{m+n};\ (a^m)^n=a^{m\cdot n};\ a^m:a^n=a^{m-n},\ a\neq 0,\ m,n\in\mathbf{N};$

$(a\cdot b\cdot c)^n=a^n\cdot b^n\cdot c^n;\ \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n},\ a,b\neq 0,\ n\in\mathbf{N}.$

Proprietăţi:

$(+a)^n=+a^n=a^n$

$$(-a)^n=\begin{cases}a^n, \text{ pentru } n=2k,\ k\in\mathbf{N}\\ -a^n, \text{ pentru } n=2k+1,\ k\in\mathbf{N}\end{cases}$$

MEDII

Media aritmetică (m_a):

$m_a=\frac{x+y}{2}$; generalizare: $m_a=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$.

Media geometrică sau proporţională (m_g):

$m_g=\sqrt{x\cdot y}$, $x>0, y>0$; generalizare: $m_g=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$, $x_1>0, x_2>0, \ldots, x_n>0$.

Media armonică (m_h):

$m_h = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}} = \dfrac{2xy}{x+y}$, generalizare: $m_h = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}}$,

$x>0, y>0$; $x_1>0, x_2>0, \ldots, x_n>0$.

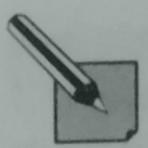
Media ponderată (m_p):

$m_p = \dfrac{p\cdot x+q\cdot y}{p+q}$, generalizare: $m_p = \dfrac{p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2+\ldots+p_n\cdot x_n}{p_1+p_2+\ldots+p_n}$,

$p>0, q>0, p, q$ – pondere; $p_1>0, p_2>0, \ldots, p_n>0, p_k$ – pondere.

Media pătratică:

$m_{\text{pătratică}} = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.



CALCUL ALGEBRIC

MONOM (NUMĂR REAL REPREZENTAT PRIN LITERE)

Definiție: Expresia algebrică reprezentând produsul dintre un coeficient şi un număr finit de variabile reale ridicate sau nu la diverse puteri, numere naturale. Variabilele sunt litere ce pot lua diferite valori.

- **Forma canonică** a unui monom: se scrie mai întâi coeficientul monomului, apoi variabilele în ordine alfabetică, la diverse puteri.
- **Gradul** unui monom este suma exponenţilor literelor care alcătuiesc monomul.
- **Produsul** a două sau mai multe monoame este tot un monom, în care coeficienţii şi variabilele s-au înmulţit între ei.
- **Puterea *n*** a unui monom, diferit de zero, este tot un monom, în care fiecare factor a fost ridicat la puterea *n*.
- Prin **împărţirea** a două monoame (împărţitorul $\neq 0$) rezultă tot un monom, în care coeficienţii şi variabilele s-au împărţit.

• O sumă algebrică este o succesiune de numere şi/sau litere legate între ele prin operaţii aritmetice (adunare, scădere).

• Produsul dintre un număr real şi o sumă algebrică se efectuează înmulţind acel număr cu fiecare termen al sumei, respectând regula semnelor la înmulţire, după care se adună noii termeni.

• Produsul dintre două sume algebrice se efectuează înmulţind fiecare termen al primei sume cu fiecare termen al celei de-a doua şi însumând noii termeni astfel obţinuţi:

Exemplu: $(x-y)(a+b-c) = xa + xb - xc - ya - yb + yc.$

Descompunerea în factori

Metode de calcul

1. Scoaterea factorului comun

Exemplu: $a \cdot b + a \cdot c - a \cdot d = a(b + c - d)$

2. Folosind formule de calcul prescurtat, în care coeficienţii factorilor sunt numere raţionale.

Formule de calcul prescurtat

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

$(a \pm b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \pm 2ab + 2ac \pm 2bc$

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

$a^4 + b^4 = (a^2 + \sqrt{2} \cdot ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2} \cdot ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) =$

$= (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$

$a^4 + 1 = (a^2 + \sqrt{2} \cdot a + 1)(a^2 - \sqrt{2} \cdot a + 1)$

$a^4 + a^2 + 1 = (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$

$a \pm 1 = (\sqrt[3]{a} \pm 1)(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{a} + 1)$

$a \pm b = (\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$(a-1)^2(a+1)^2 = [(a-1)a+1]^2 = (a^2-1)^2 = a^4 - 2a^2 + 1$

FUNCȚII

Funcţia este definită ca legătura dintre elementele a două mulţimi pe bază de corespondenţe (legi).

$$f: A \to B,$$

A – domeniu de definiţie,

B – codomeniu (mulţimea în care funcţia ia valori).

$x \in A$, x – variabilă independentă

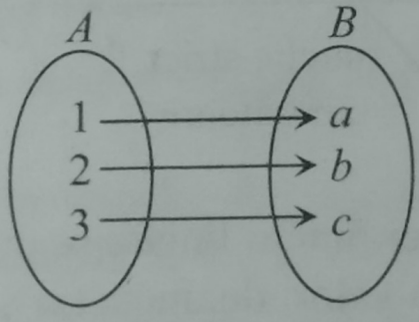
$f(x) \in B$, $f(x)$ – imaginea în B a lui x din A prin f

$y = f(x)$ – lege de corespondenţă

Definirea unei funcţii

1. *Funcţii definite sintetic*, numind pentru fiecare element din A elementul care i se asociază din B astfel:

diagrame:



$f: A \to B$
$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{a, b, c\}$

tabele:

A	x	1	2	3
B	$f(x)$	a	b	c

$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{a, b, c\}$

În fiecare din cazurile precedente s-a pus în evidenţă funcţia $f: A \to B$, unde $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \{a, b, c\}$; $f(1) = a$; $f(2) = b$; $f(3) = c$.

2. *Funcţii definite analitic*, specificând o proprietate care leagă un element arbitrar $x \in A$ de elementul $f(x) \in$ B.

formule: $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$.

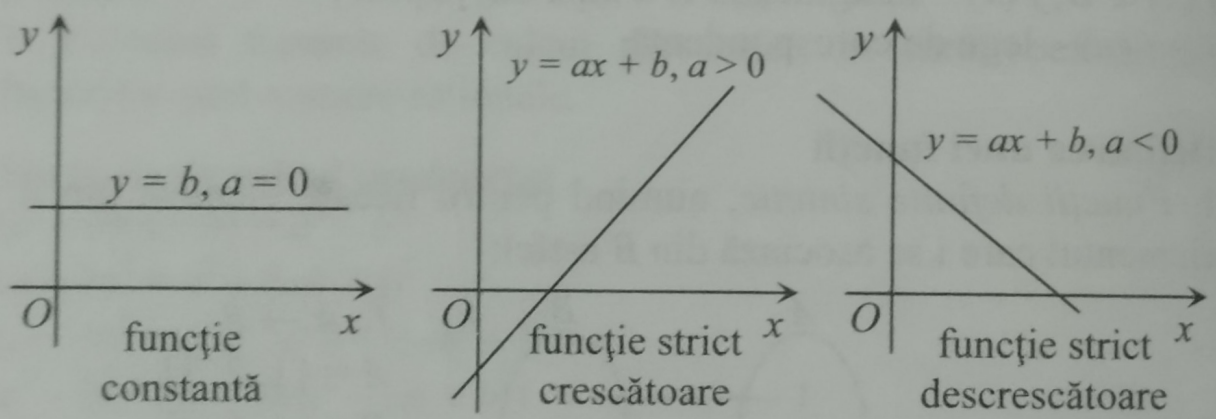
• Fiecare element din A trebuie să aibă un corespondent în B.
• Unui element din A trebuie să-i corespundă un singur element din B.
• Nu este necesar ca oricare element din B să fie imagine a unui element din A.
• Două sau mai multe elemente din A pot avea aceeaşi imagine în B.

Graficul unei funcţii

$\{(x; y) \mid x \in A; y = f(x)\}$ reprezintă, pe un sistem de axe de coordonate ortogonal, legătura dintre elementele $x \in A$ şi $f(x) \in B$.

Funcţii liniare

• Reprezentarea grafică a unei funcţii $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = ax + b$



• Pentru a trasa graficul unei funcţii liniare se procedează astfel:
– dăm variabilei x două valori distincte (x_1 şi x_2);
– calculăm valorile funcţiei pentru valorile alese;
– reprezentăm grafic punctele ale căror coordonate au fost determinate ($M(x_1, f(x_1))$ şi $N(x_2, f(x_2))$:
– trasăm dreapta ce trece prin aceste puncte.
• Uneori este mai comod să stabilim punctele în care graficul intersectează axele de coordonate pentru trasarea graficului:
$G_f \cap Oy = A(0, f(0)) \Leftrightarrow G_f \cap Oy = A(0, b)$;

$G_f \cap Ox = B\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.

GEOMETRIE

PUNCTUL

Definiție: Figura geometrică elementară, fără nicio dimensiune.

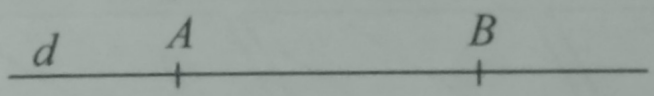
Puncte distincte: Fie A, B: $A \neq B$.

Puncte confundate: Fie A, B: $A = B$.

DREAPTA

Definiție: Drumul cel mai scurt, în spaţiu, dintre două puncte distincte între ele, prelungit în ambele sensuri oricât de mult.

Proprietăți: Dreapta are lungime infinită.



PUNCTE COLINIARE

Definiție: Trei sau mai multe puncte care aparţin aceleiaşi drepte.

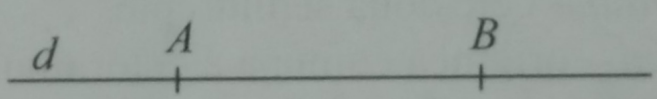
SEGMENTUL DE DREAPTĂ

Definiție: Porţiunea dintr-o dreaptă d, cuprinsă între două puncte A şi B.

Notații: (AB) segment deschis (nu conţine punctele A şi B)

$[AB]$ segment închis (conţine şi punctele A şi B)

$[AB)$ segment semideschis (îl conţine pe A, dar nu şi pe B)



• Două segmente care au aceeaşi lungime se numesc segmente congruente.

Exemplu: $AB = 5{,}3$ cm şi $CD = 5{,}3$ cm $\Rightarrow$ AB şi CD sunt congruente. Notăm $[AB] \equiv [CD]$.

• Un punct M este mijlocul unui segment $[AB]$ dacă M este situat între A şi B, iar $[AM] \equiv [MB]$.

SEMIDREAPTA

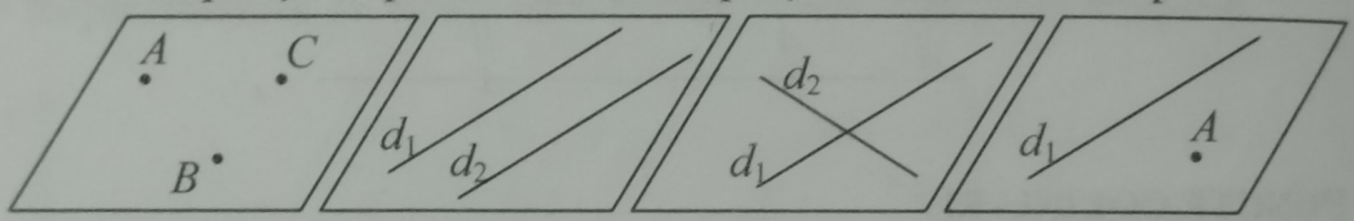
Orice punct al unei drepte determină pe dreapta respectivă două semidrepte opuse.

PLANUL

Definiție: Figura geometrică formată din toate dreptele care trec printr-un punct M dat (care nu aparţine unei drepte d) şi un punct P, care parcurge dreapta d în întregime.

Proprietăți:

1. Trei puncte distincte determină un plan.
2. Două drepte concurente sau paralele determină un plan.
3. O dreaptă şi un punct care nu-i aparţine determină un plan.



SPAŢIUL GEOMETRIC

Definiție: Suprafaţa care conţine toate planele paralele şi neparalele cu un plan dat.

UNGHIUL

Definiție: Figura geometrică formată din două semidrepte (d_1 şi d_2) care au aceeaşi origine O.

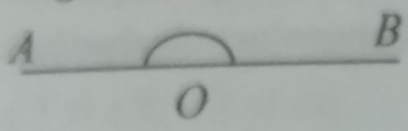
Laturile unghiului – cele două semidrepte.

Vârful unghiului – originea comună a celor două semidrepte.

Măsura unghiului: se face prin măsurarea deschiderii dintre semidreptele care formează unghiul. Ea se determină cu ajutorul arcelor de cerc, socotind că un semicerc are 180°. Deci, unitatea de măsură este unghiul de 1°.

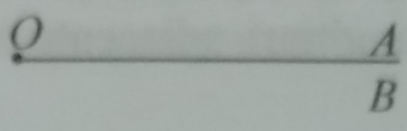
Două unghiuri care au aceeaşi măsură se numesc unghiuri congruente. Notăm $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DEF$ sau $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle DEF)$.

Unghiul alungit (180°)



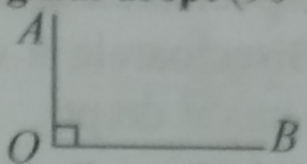
Format din două semidrepte opuse.

Unghiul nul (0°)



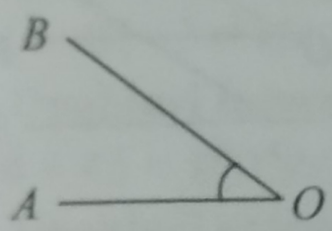
Unghiul ale cărui laturi se confundă.

Unghiul drept (90°)

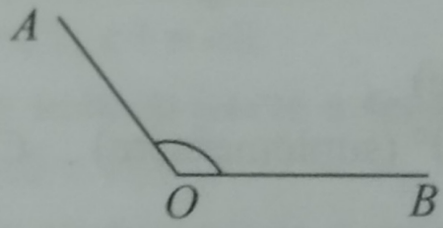


Laturile unghiului sunt perpendiculare.

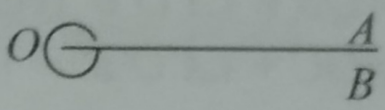
Unghiul ascuțit (< 90°)



Unghiul obtuz (> 90°)

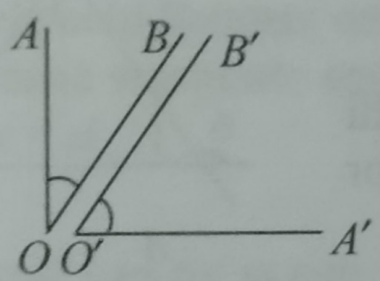


Unghiul în jurul unui punct (= 360°)



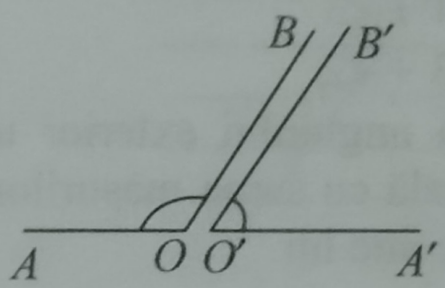
Unghiuri complementare

$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle A'O'B') = 90°$



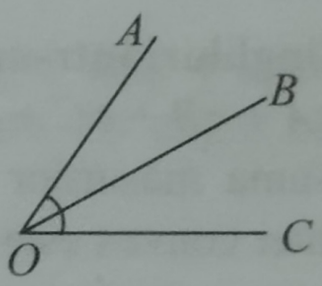
Unghiuri suplementare

$m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle A'O'B') = 180°$



Unghiuri adiacente

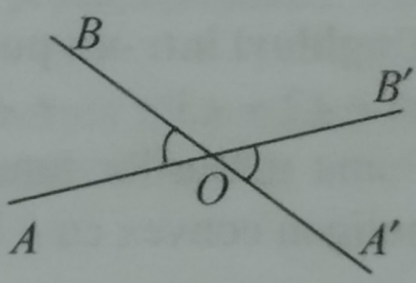
Definiție: Două unghiuri care au o latură comună, iar celelalte două laturi situate de o parte şi de alta a acesteia.



Unghiuri opuse la vârf

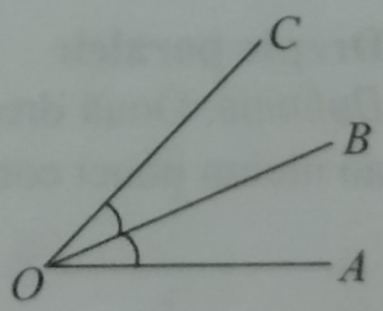
Definiție: Unghiuri formate de două drepte care se intersectează.

$\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'OB'$



Bisectoarea unui unghi

Definiție: Semidreapta cu originea în vârful unghiului care împarte un unghi în două părți egale. Bisectoarea este locul geometric al punctelor egal depărtate de laturi.



• Bisectoarele a două unghiuri opuse la vârf sunt semidrepte opuse.
• Bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare formează un unghi drept.

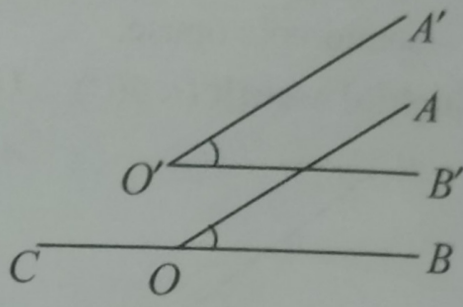
Unghiuri cu laturile paralele

$OB \parallel O'B'$

$OA \parallel O'A'$

$\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle A'O'B'$ (egale)

$\sphericalangle AOC + \sphericalangle A'O'B' = 180°$ (suplementare)



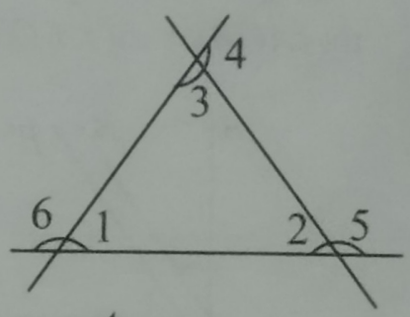
Unghiuri exterioare unui triunghi

$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2$

$\sphericalangle 5 = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 3$

$\sphericalangle 6 = \sphericalangle 3 + \sphericalangle 2$

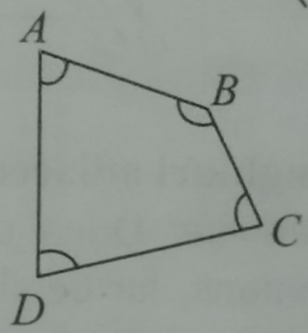
Măsura unghiului exterior unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor neadiacente lui.



Unghiuri într-un patrulater

$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360°$

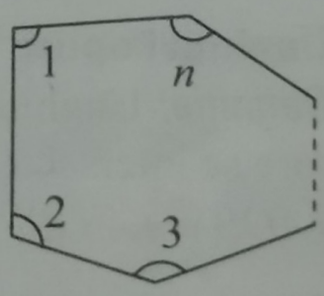
Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este de 360°.



Unghiuri într-un poligon convex cu *n* laturi

$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \ldots + \sphericalangle n = (n - 2) \cdot 180°$

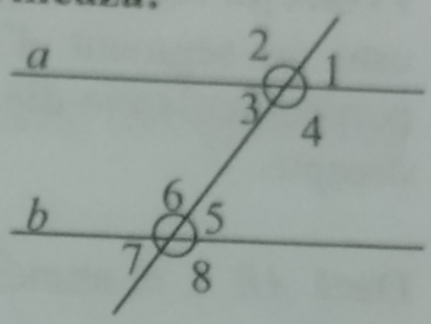
Suma măsurilor tuturor unghiurilor dintr-un poligon convex cu n laturi este $(n - 2) \cdot 180°$.



Drepte paralele

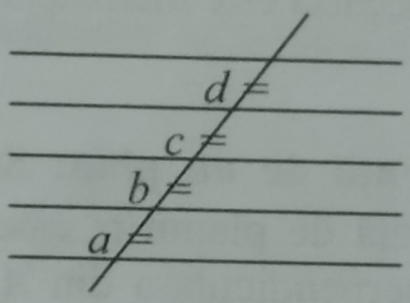
Definiție: Două drepte distincte și coplanare sunt paralele dacă nu au niciun punct comun. (*Notație:* $a \parallel b$ sau $AB \parallel CD$.)

O secantă și două drepte paralele ($a \parallel b$) formează:



- **Unghiuri alterne interne congruente**
  $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 5$; $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 6$.
- **Unghiuri alterne externe congruente**
  $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 7$; $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 8$.
- **Unghiuri corespondente congruente**
  $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 5$; $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 6$; $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 7$; $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 8$.
- **Unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare**
  $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 = 180°$; $\sphericalangle 3 + \sphericalangle 6 = 180°$.
- **Unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare**
  $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 8 = 180°$; $\sphericalangle 2 + \sphericalangle 7 = 180°$.

Paralelele echidistante determină pe o secantă segmente egale.
$a = b = c = d$



PERPENDICULARE ȘI OBLICE

Definiție: Vom numi **perpendiculară** pe o dreaptă dată d orice dreaptă d', concurentă cu d, care face cu aceasta un unghi cu măsura de 90°.

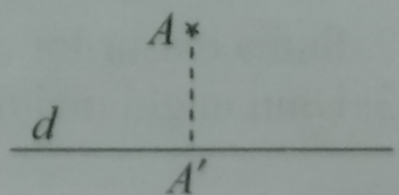
Notație: $d \perp d'$

Distanța de la un punct la o dreaptă este **perpendiculara** din punct pe acea dreaptă.

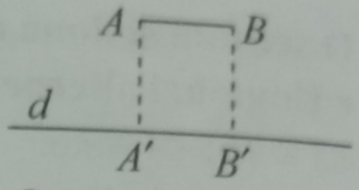
Definiție: Vom numi **oblică** față de d orice dreaptă d', concurentă cu dreapta d, care face cu aceasta un unghi propriu diferit de 90°.

PROIECȚII ORTOGONALE

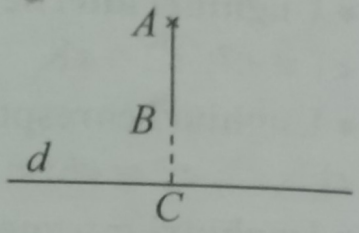
Proiecția unui punct A pe dreapta d este piciorul perpendicularei duse din A la d.



Proiecția segmentului AB pe dreapta d este un segment $A'B'$ obținut coborând perpendicularele din capetele acestuia pe dreaptă.

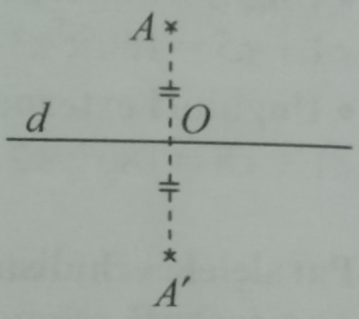


Dacă $AB \perp d$, atunci proiecția sa este un punct.

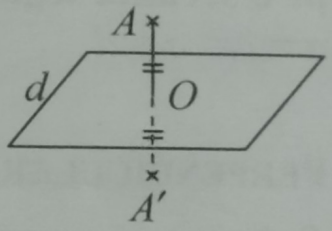


Simetrie

Față de o dreaptă: Două puncte A și A' sunt simetrice față de o dreaptă d, dacă aceasta este mediatoarea segmentului AA'.



Față de un plan: Simetria punctului A față de planul α este un punct situat pe perpendiculara din A pe plan la distanțe egale: $OA' = OA$.

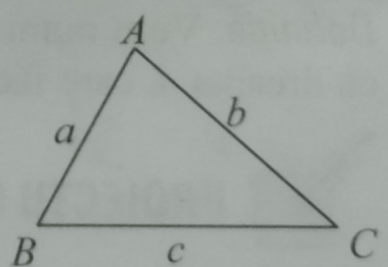


TRIUNGHIUL

Definiție: Figura geometrică rezultată din reuniunea a trei segmente $[AB] \cup [BC] \cup [CA]$, unde punctele A, B, C necoliniare sunt capetele segmentelor și vârfurile triunghiului.

Notație: ΔABC

Perimetrul unui triunghi este suma lungimilor laturilor sale.



Proprietăți:

1. $a + b > c$; $a + c > b$; $b + c > a$;
   $a < |b - c|$, $b < |c - a|$, $c < |a - b|$;
2. Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180°.
3. Unui unghi mai mare i se opune o latură mai mare.

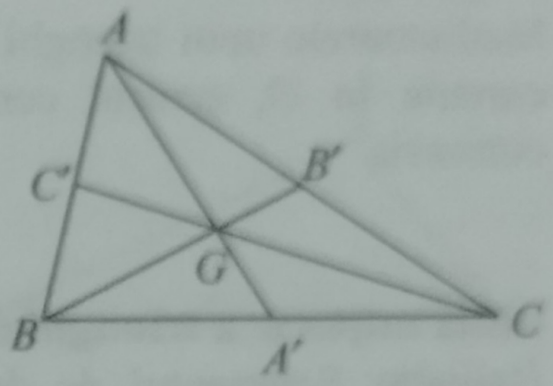
LINII IMPORTANTE ÎNTR-UN TRIUNGHI

Mediana

Definiție: Segmentul de dreaptă care unește vârful triunghiului cu mijlocul laturii opuse.

Proprietăți:

Medianele unui triunghi sunt concurente într-un punct notat G și numit centru de greutate. G se găsește la 2/3 față de vârf și 1/3 față de bază pe fiecare mediană.

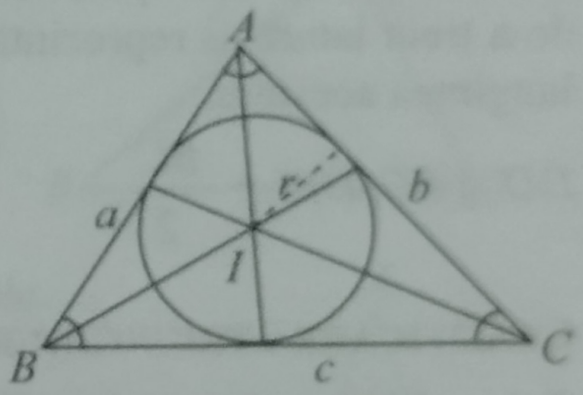


Bisectoarea

Definiție: Semidreapta cu originea în vârful unghiului care împarte unghiul în două unghiuri congruente.

Proprietăți:

Într-un triunghi, cele 3 bisectoare se intersectează într-un punct I (centrul cercului înscris).



$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

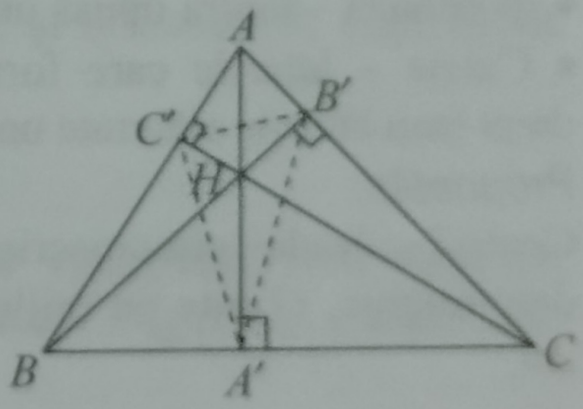
r – raza cercului înscris

Înălțimea

Definiție: Segmentul de dreaptă perpendicular, dus din vârful unui triunghi pe latura opusă.

Proprietăți:

Înălțimile unui triunghi sunt concurente într-un punct H numit ortocentru. $A'B'C'$ se numește triunghi ortic, iar AA', BB', CC' sunt bisectoarele unghiurilor acestui triunghi.

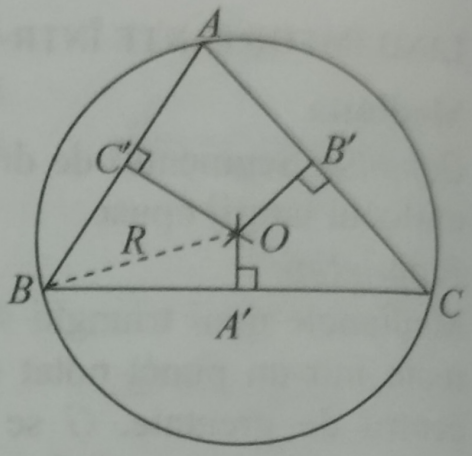


Mediatoarea

Definiție: Semidreapta perpendiculară ridicată în mijlocul unei laturi.

Proprietăți:

Mediatoarele unui triunghi sunt concurente în O, centrul cercului circumscris.



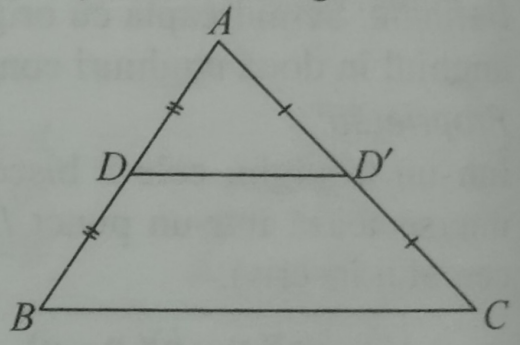
Linia mijlocie a triunghiului

Definiție: Segmentul de dreaptă care unește mijloacele a două laturi ale unui triunghi se numește linia mijlocie a triunghiului.

Proprietăți:

Linia mijlocie este paralelă cu cea de-a treia latură și reprezintă 1/2 din lungimea acesteia.

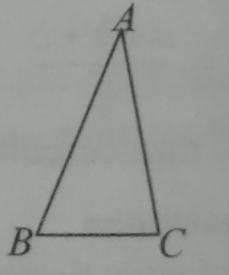
$$DD' \parallel BC, DD' = \frac{BC}{2}$$



CLASIFICAREA TRIUNGHIURILOR DUPĂ MĂSURA UNGHIURILOR

Triunghi ascuțitunghic

Definiție: Toate unghiurile sunt mai mici de 90°.



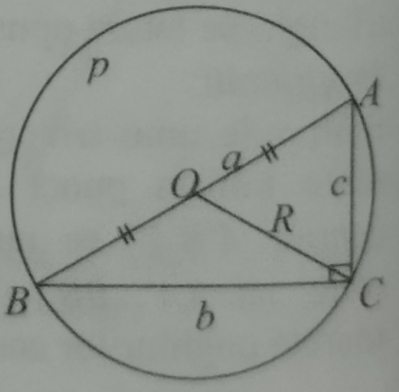
Triunghi dreptunghic

Definiție: Are un unghi de 90°.

- Ipotenuza – latura opusă unghiului drept.
- Catete – laturile care formează unghiul drept (sau laturile alăturate unghiului drept).

Proprietăți:

Centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic, O este pe mijlocul ipotenuzei.



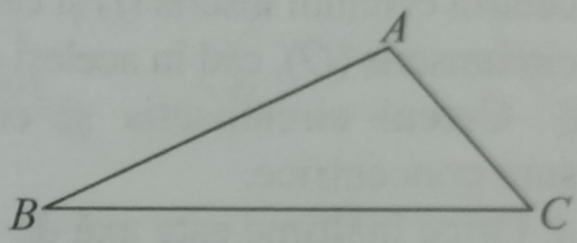
$a = 2 \cdot R$ (R – raza cercului circumscris)

$r = \dfrac{bc}{2p}$ (r – raza cercului înscris)

p = semiperimetru = $\dfrac{a+b+c}{2}$

Triunghi obtuzunghic

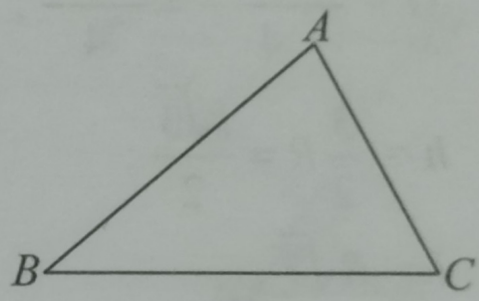
Definiție: Are un unghi mai mare de 90°.



CLASIFICAREA TRIUNGHIURILOR DUPĂ LUNGIMILE LATURILOR

Triunghi oarecare sau scalen

Definiție: Oricare două laturi nu sunt congruente.

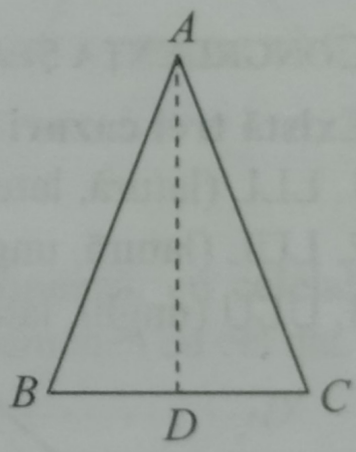


Triunghi isoscel

Definiție: Triunghiul cu două laturi egale.

Proprietăți:

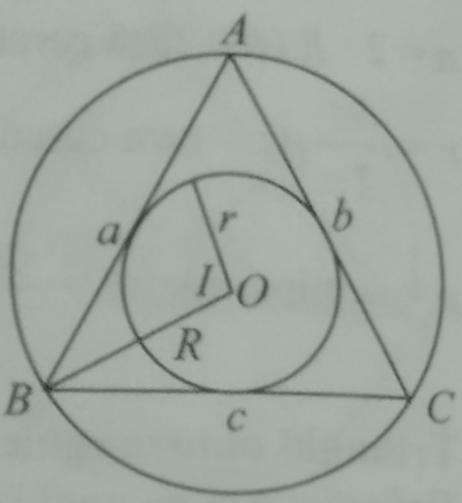
1. Triunghiul isoscel are unghiurile alăturate bazei congruente ($\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$).
2. Înălțimea, mediana, mediatoarea și bisectoarea duse din vârful A al triunghiului isoscel BAC sunt identice.
3. AD este axă de simetrie pentru triunghi.
4. Înălțimile, medianele, mediatoarele și bisectoarele unghiurilor congruente sunt respectiv congruente.



Triunghi echilateral

Definiție: Triunghiul cu toate laturile congruente este triunghi echilateral. Triunghiul echilateral are toate unghiurile congruente, egale cu 60°, și toate laturile egale.

Proprietăți:



1. Înălțimea, mediana, mediatoarea și bisectoarea duse din orice vârf sunt identice (confundate).
2. Ortocentrul (H), centrul de greutate (G), centrul cercului înscris (I) și centrul cercului circumscris (O), cad în același punct.
3. Cercul circumscris și cercul înscris sunt concentrice.
4. Orice înălțime este axă de simetrie pentru triunghi.
5. h = mediana = mediatoarea = bisectoarea

$$\mathcal{A} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4};$$

$$h = \frac{3}{2}R = \frac{l\sqrt{3}}{2};$$

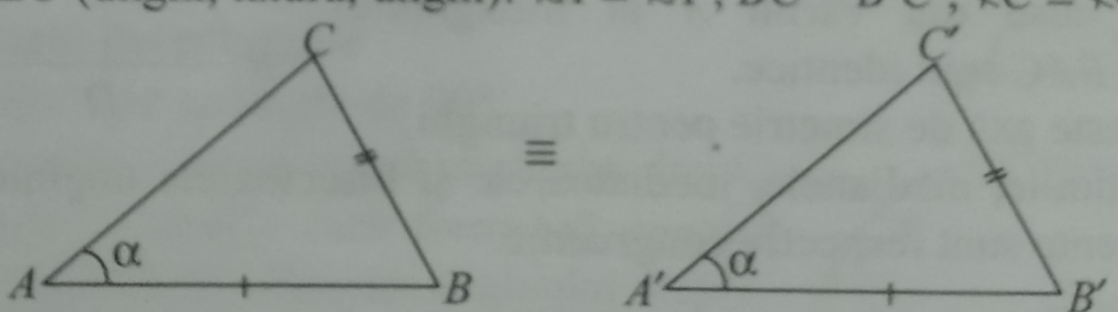
$$l = R\sqrt{3}.$$

$\mathcal{A}$ = aria triunghiului;
l = latura triunghiului;
h = înălțimea triunghiului;
R = raza cercului circumscris triunghiului.

CONGRUENȚA ȘI ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR OARECARE

Există trei cazuri de congruență a triunghiurilor:

1. LLL (latură, latură, latură): $AB = A'B'$; $BC = B'C'$; $AC = A'C'$;
2. LUL (latură, unghi, latură): $AB = A'B'$; $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$; $AC = A'C'$;
3. ULU (unghi, latură, unghi): $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$; $BC = B'C'$; $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$.



Două triunghiuri ΔABC și $\Delta A'B'C'$ sunt **asemenea,** notat (~), dacă:

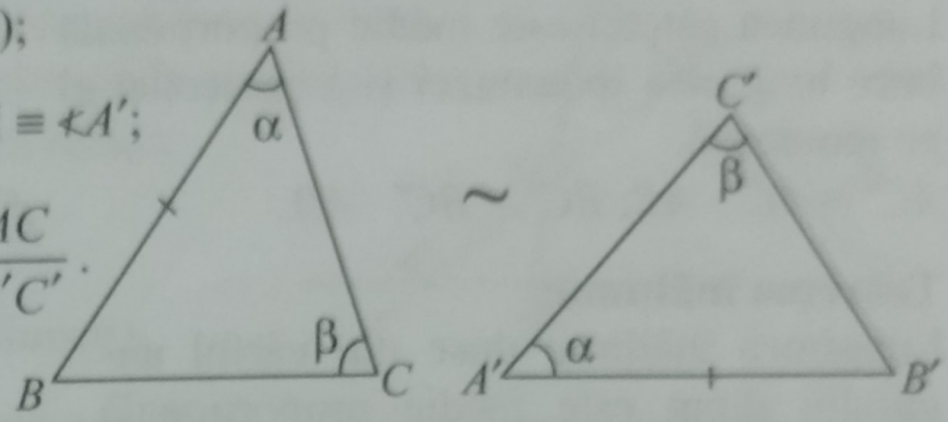
- au laturile proporționale: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ și
- au unghiurile congruente: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$; $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$; $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$.

Există trei cazuri de asemănare a triunghiurilor:

1. UU (unghi, unghi);

2. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$; $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$;

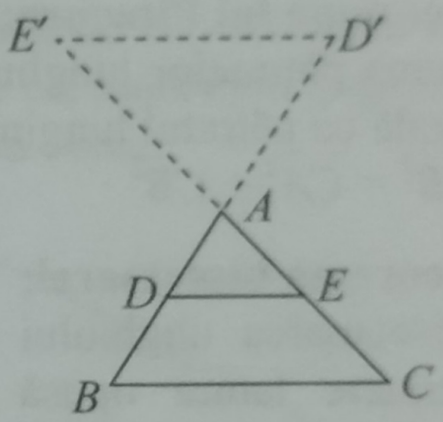
3. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$.



RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHI

Teorema lui Thales:

O paralelă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporționale.



$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$

$D'E' \parallel BC \Rightarrow \frac{D'A}{D'B} = \frac{E'A}{E'C}$

Reciproca teoremei lui Thales:

Dacă $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC.$

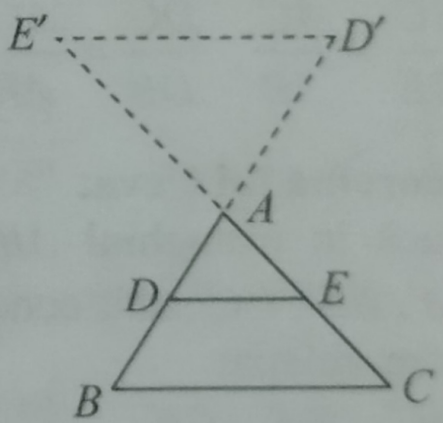
Teorema fundamentală a asemănării:

O paralelă la una din laturile unui triunghi formează, cu celelalte două laturi sau cu prelungirile lor, un triunghi asemenea cu cel dat.

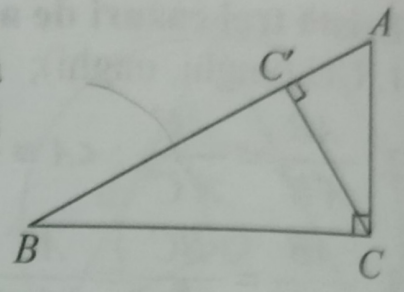
Dacă $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$.

Dacă $D'E' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB}{AD'} = \frac{AC}{AE'} = \frac{BC}{D'E'}$.

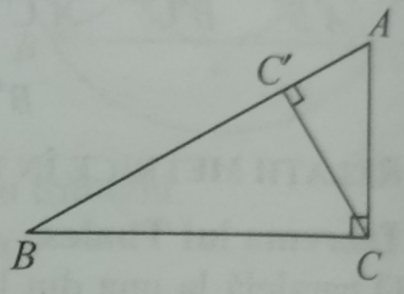
$\Delta ADE \sim \Delta ABC$; $\Delta AE'D' \sim \Delta ACB$.



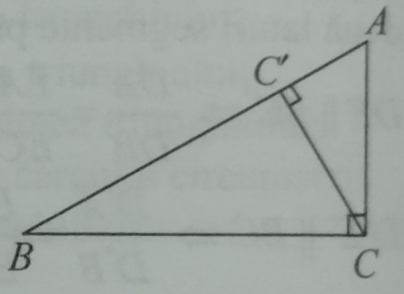
Teorema catetei:
Lungimea catetei este medie proporţională între lungimea ipotenuzei şi a proiecţiei ei pe ipotenuză.
$AC^2 = AC' \cdot AB$; $BC^2 = BC' \cdot AB$.



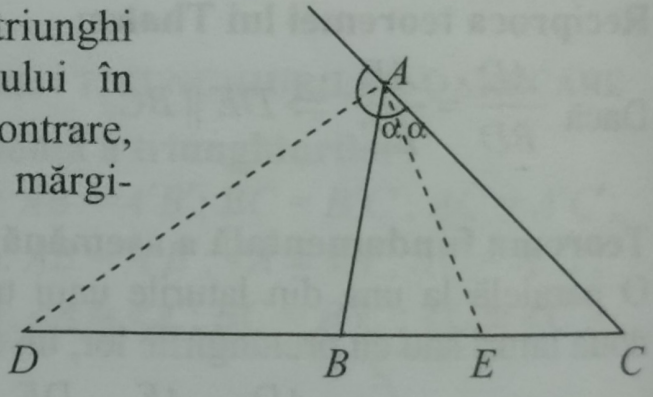
Teorema înălţimii:
Lungimea înălţimii duse din vârful unghiului drept este medie proporţională între lungimile segmentelor determinate de ea pe ipotenuză.
$C'C^2 = AC' \cdot BC'$; $AB = AC' + C'B$.



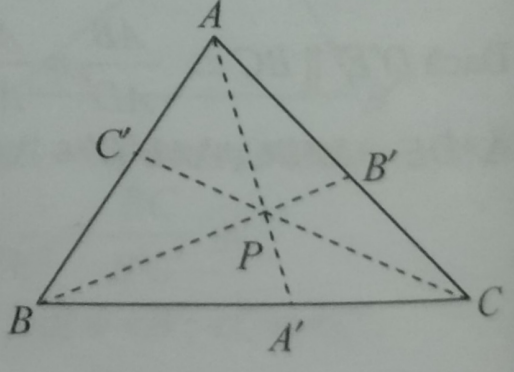
Teorema lui Pitagora:
Suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei.
$AB^2 = CA^2 + CB^2$



Teorema bisectoarei:
Bisectoarea unghiului unui triunghi împarte latura opusă unghiului în două segmente de sensuri contrare, proporţionale cu laturile care mărginesc unghiul.
AE – bisectoare internă
AD – bisectoare externă
$\frac{EC}{BE} = \frac{AC}{AB}$; $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB}$.



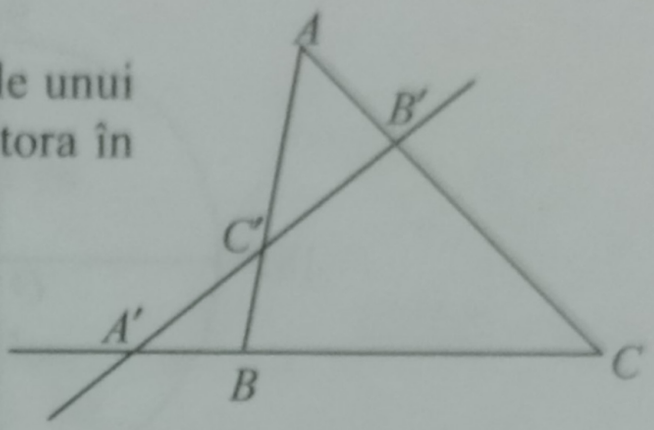
Teorema lui Ceva:
Dacă în triunghiul ABC trei drepte AA', BB', CC' sunt concurente, atunci avem relaţia:
$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$.



Teorema lui Menelaus:
Dacă o dreaptă intersectează laturile unui triunghi ABC sau prelungirile acestora în A', B', C', atunci avem relaţia:

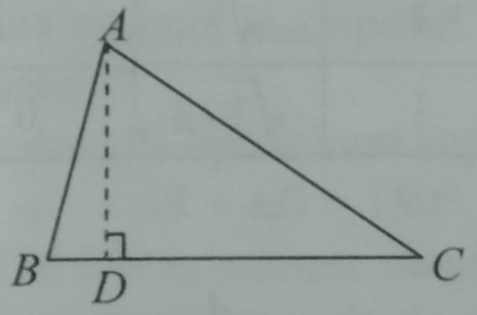
$$\frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AC'}{BC'} = 1$$

(segmentele fiind coliniare).

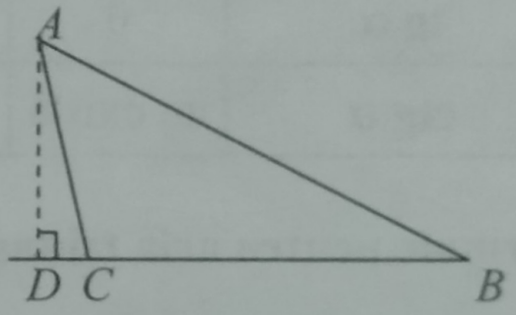


Teorema reciprocă este adevărată. (Dacă relaţia de mai sus există, atunci cele trei puncte A', B', C' sunt coliniare.)

Teorema lui Pitagora generalizată:
Pătratul unei laturi este egal cu suma pătratelor celorlalte două laturi din care se scade sau se adună de două ori produsul dintre una din aceste laturi şi proiecţia celeilalte pe ea, după cum unghiul opus laturii care se calculează este ascuţit sau obtuz.



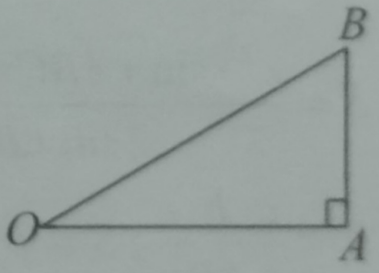
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2DC \cdot BC$

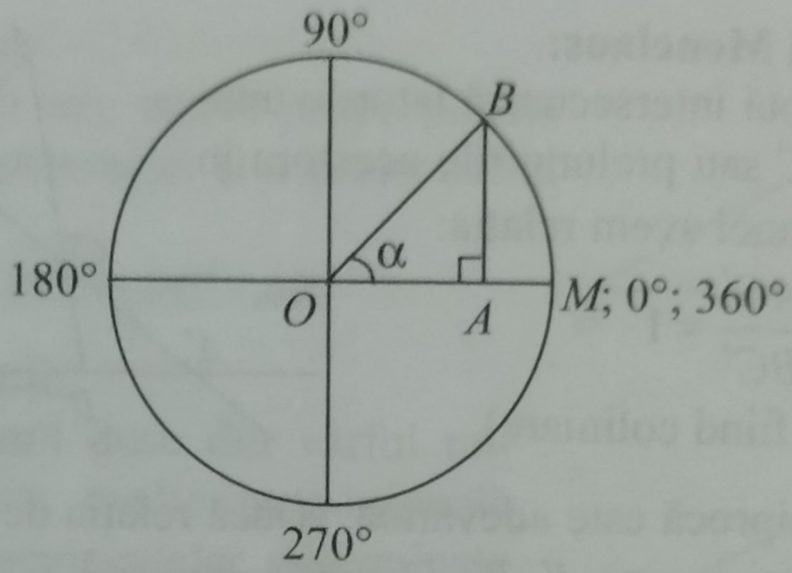


$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2DC \cdot BC$

Funcţii trigonometrice în triunghiul dreptunghic

- sinusul: $\sin\sphericalangle AOB = \dfrac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}} = \dfrac{AB}{OB}$
- cosinusul: $\cos\sphericalangle AOB = \dfrac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}} = \dfrac{OA}{OB}$
- tangenta: $\operatorname{tg}\sphericalangle AOB = \dfrac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}} = \dfrac{AB}{OA}$
- cotangenta: $\operatorname{tg}\sphericalangle AOB = \dfrac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}} = \dfrac{OA}{AB}$



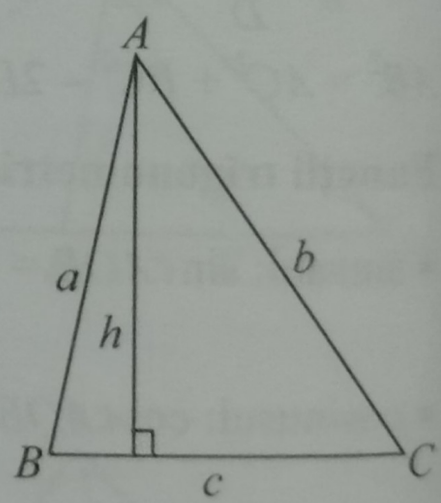


Funcţia trigonometrică	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos α	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tg α	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	nu există
ctg α	nu există	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Formule pentru aria triunghiului (*S*)

Formula lui Heron. Dacă $p = \dfrac{a+b+c}{2}$,

atunci $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.



$S = \dfrac{c \cdot h}{2}$; $S = \dfrac{b \cdot a \cdot \sin \sphericalangle BAC}{2}$;

$S = \dfrac{c^2 \cdot \sin \sphericalangle ABC \cdot \sin \sphericalangle ACB}{2 \sin \sphericalangle BAC}$;

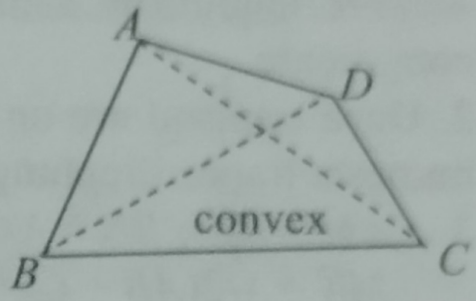
$S = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4R}$; $S = p \cdot r$, unde

r – raza cercului înscris,

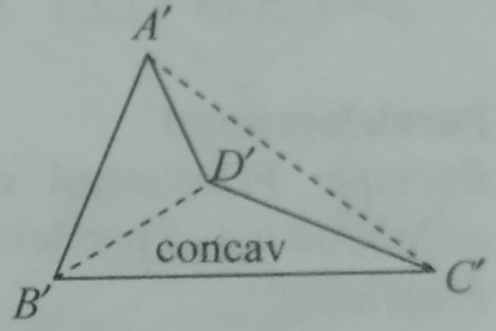
R – raza cercului circumscris.

PATRULATERE

Definiție: Patrulaterul este poligonul cu patru laturi.



Patrulaterul convex este acel patrulater în care prelungirile oricărei laturi nu intersectează interiorul patrulaterului. În caz contrar, patrulaterul se numește **concav.**



Patrulaterul inscriptibil

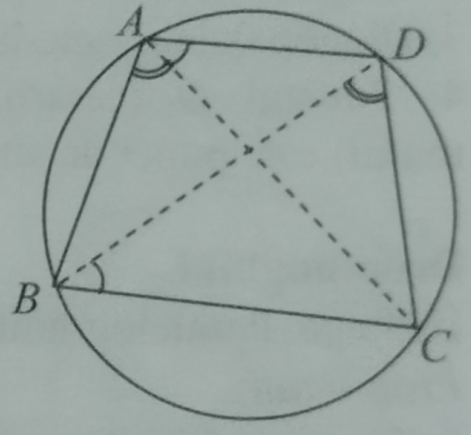
Definiție: Patrulaterul cu toate vârfurile pe cerc se numește patrulater înscris. Patrulaterul care poate fi înscris într-un cerc se numește patrulater inscriptibil.

Proprietăți:

1. Unghiurile opuse sunt suplementare.
$\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D = 180°$.

2. AC și BD se numesc diagonale. Două laturi opuse fac cu cele două diagonale unghiuri congruente.

Exemplu: $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle DBC$



3. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater este de 360°.

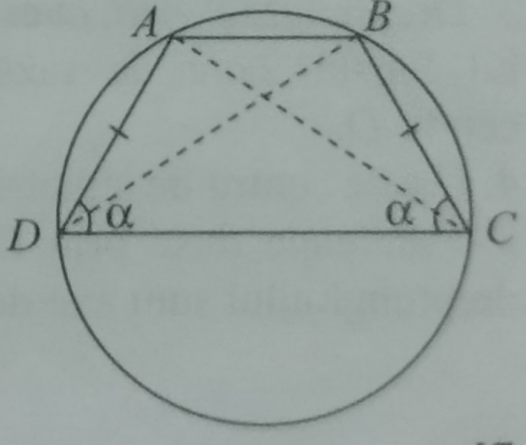
Trapezul

Definiție: Patrulaterul cu două laturi paralele, $AB \parallel CD$ (numite baze), și două laturi neparalele se numește trapez.

Proprietăți:

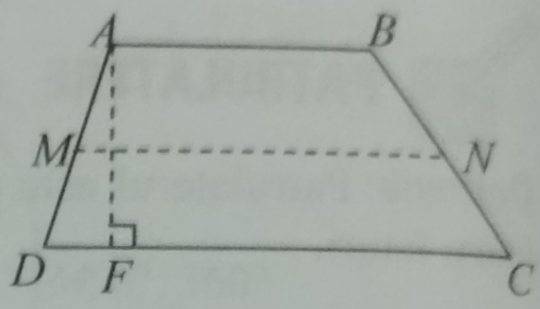
1. Dacă laturile neparalele sunt egale, atunci trapezul $ABCD$ este isoscel și:

a) este inscriptibil;



b) are diagonalele egale;

c) are unghiurile alăturate unei baze congruente.



2. Dacă trapezul are un unghi drept, se numeşte trapez dreptunghic ($AFCB$).

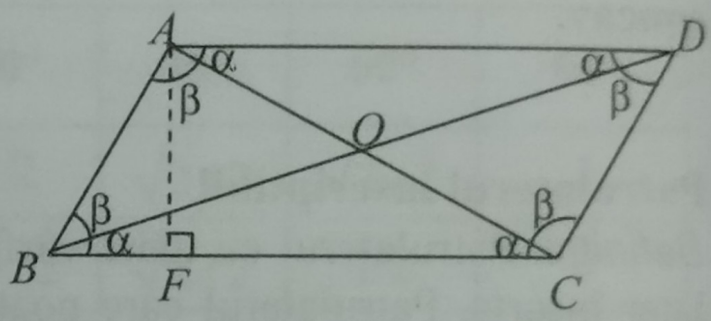
3. $AM = MD$; $BN = NC$;

$MN = 1/2(AB + CD)$, MN – linie mijlocie

$S = 1/2(AB + CD) \cdot AF = MN \cdot AF$.

Paralelogramul

Definiție: Patrulaterul convex cu laturile opuse paralele.



Proprietăți:

1. Laturile opuse sunt paralele şi congruente.
2. Unghiurile opuse sunt congruente.
3. Diagonalele se taie în părţi egale.
4. Punctul O (centrul paralelogramului) este punct de simetrie.

$S = AF \cdot BC$ (suprafața);

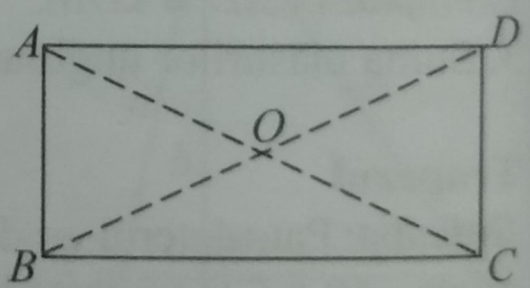
$$S = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin \sphericalangle DOC}{2}.$$

Dreptunghiul

Definiție: Paralelogramul cu un unghi drept.

Proprietăți:

1. Toate unghiurile au 90°.
2. Diagonalele sunt congruente şi se taie în părţi congruente.
3. Dreptunghiul $ABCD$ este inscriptibil într-un cerc de rază $1/2AC$ şi centru O.
4. O este centru de simetrie.
5. Paralelele duse prin O la laturile dreptunghiului sunt axe de simetrie.



$S = AD \cdot AB$ (suprafața);

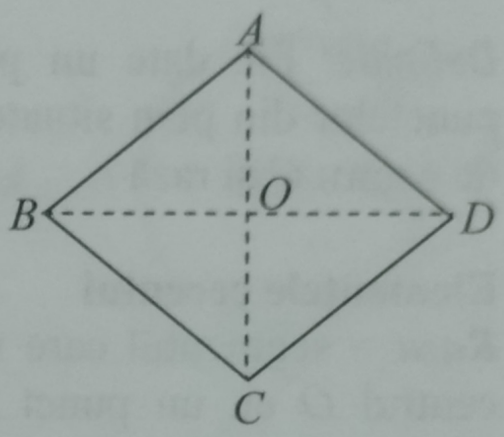
$$S = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin \sphericalangle DOC}{2}.$$

Rombul

Definiție: Paralelogramul ce are două laturi alăturate congruente se numeşte romb.

Proprietăți:

1. Are toate laturile egale.
2. Diagonalele sunt perpendiculare şi se taie în părţi congruente.
3. Diagonalele sunt axe de simetrie.
4. Diagonalele sunt şi bisectoare.
5. Unghiurile opuse sunt congruente. $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C;\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle D.$
6. O este centru de simetrie pentru romb.



$$S = \frac{AC \cdot BD}{2} = l^2 \sin\sphericalangle A.$$

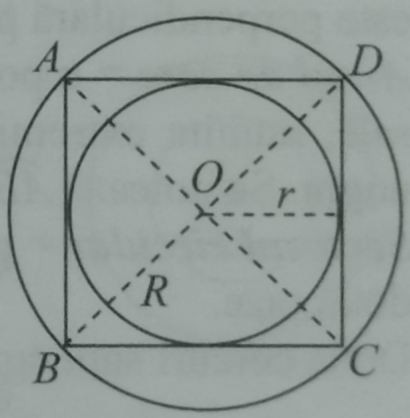
l = latura rombului.

Pătratul

Definiție: Rombul cu un unghi drept se numeşte pătrat. Dreptunghiul cu două laturi alăturate congruente se numeşte pătrat.

Proprietăți:

1. Are laturile egale.
2. Are toate unghiurile de 90°.
3. Diagonalele sunt egale şi perpendiculare şi taie pătratul în părţi congruente.
4. Diagonalele sunt axe de simetrie.
5. Poate fi înscris şi circumscris unui cerc.
6. Raza cercului înscris = l/2 latură = r.
7. Raza cercului circumscris = l/2 diagonală = R.



latura = $R\sqrt{2}$;

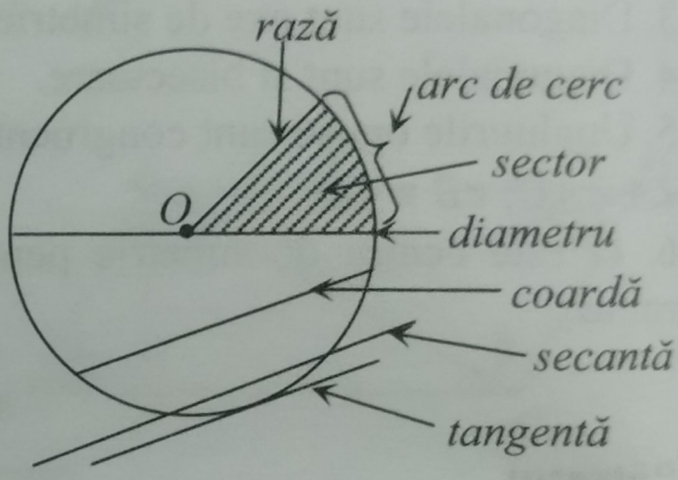
S = latura^2; $S = 2R^2$;

diagonala = latura $\sqrt{2}$.

CERCUL

Definiție: Fie date un punct O şi un număr $r > 0$. Mulţimea punctelor din plan situate la distanţa r faţă de O se numeşte cerc de centru O şi rază r.

Elementele cercului



Raza = segmentul care uneşte centrul O cu un punct de pe cerc. Toate razele sunt egale.

Coarda = segmentul $[AB]$ care uneşte două puncte ale cercului.

Diametrul = coarda care conţine centrul cercului. Este axa de simetrie a cercului.

Secanta = dreapta care taie cercul în două puncte.

Tangenta = dreapta care atinge cercul într-un singur punct (ea este perpendiculară pe rază în punctul de contact).

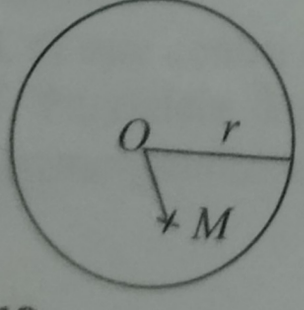
Arcul de cerc = o porţiune din cerc cuprinsă între două puncte ale sale, numite extremităţi. Măsurarea se face în grade exact ca la unghi. Se notează $\overset{\frown}{AB}$.

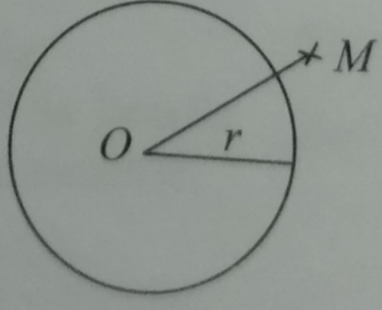
Sectorul circular = porţiunea din interiorul cercului cuprinsă între două raze.

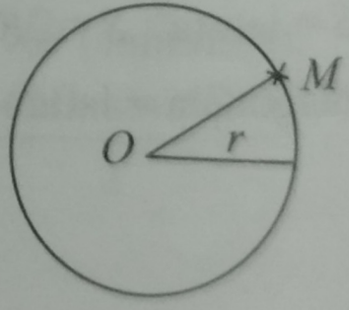
Două cercuri sunt egale atunci când au razele egale.

Poziţiile relative ale unui punct *M* faţă de un cerc

interior: $OM < r$ *exterior*: $OM > r$ *pe cerc*: $OM = r$

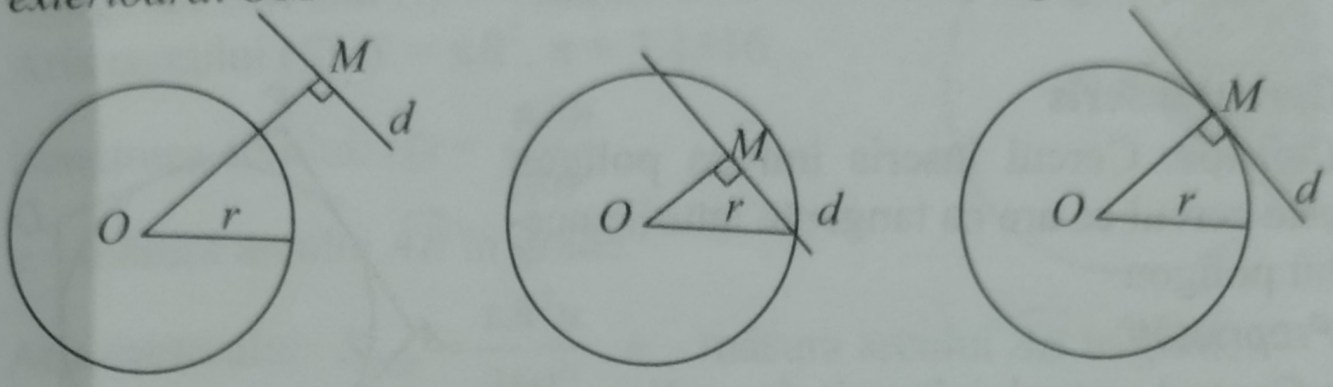






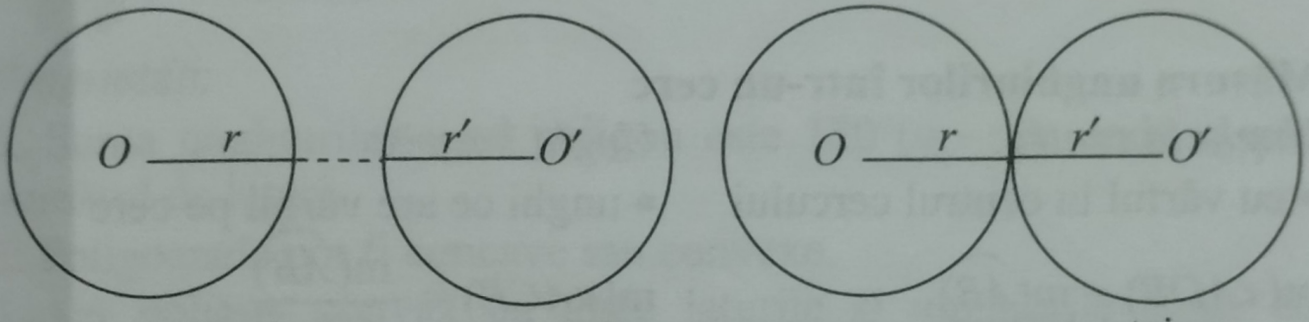
Poziţiile relative ale unei drepte *d* faţă de un cerc

exterioară: $OM > r$ *secantă*: $OM < r$ *tangentă*: $OM = r$



Poziţiile relative a două cercuri

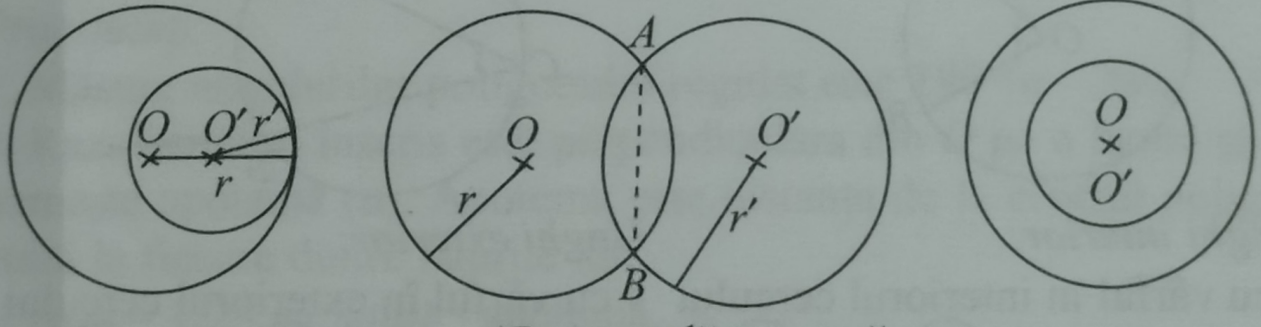
exterioare: $OO' > r + r'$ *tangente exterioare*: $OO' = r + r'$



tangente interioare: $OO' < r - r'$

secante: $OO' < r + r'$ şi $OO' > r - r'$

concentrice: $O' = O$



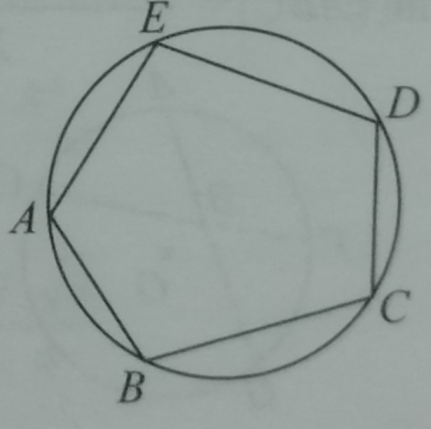
AB – coardă comună

Cercul circumscris

Definiţie: Cercul circumscris unui poligon este cercul pe a cărui circumferinţă se află vârfurile poligonului respectiv.

Proprietăţi:

1. Vârfurile poligonului înscris în cerc sunt puncte conciclice.



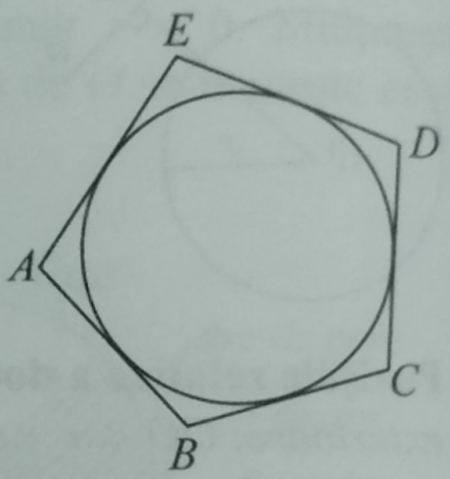
2. Centrul cercului circumscris se află la intersecția mediatoarelor laturilor poligonului înscris.

Cercul înscris

Definiție: Cercul înscris într-un poligon este cercul ce are ca tangente laturile acelui poligon.

Proprietăți:

• Centrul cercului înscris în poligon se află la intersecția bisectoarelor unghiurilor poligonului.

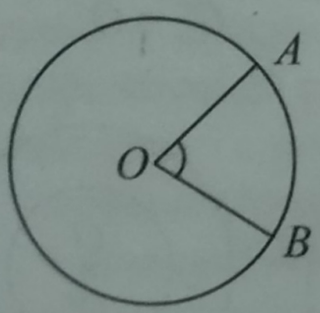


Măsura unghiurilor într-un cerc

Unghi la centru:

• cu vârful în centrul cercului

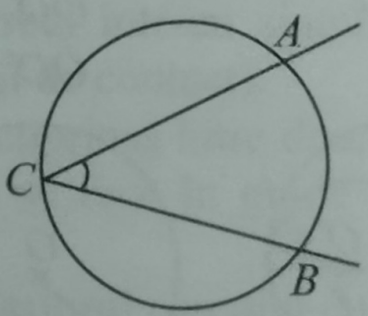
$m(\sphericalangle AOB) = m(\overset{\frown}{AB})$



Unghi înscris:

• unghi ce are vârful pe cerc

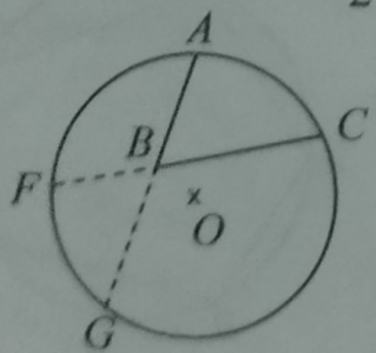
$m(\sphericalangle ACB) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$



Unghi interior:

• cu vârful în interiorul cercului

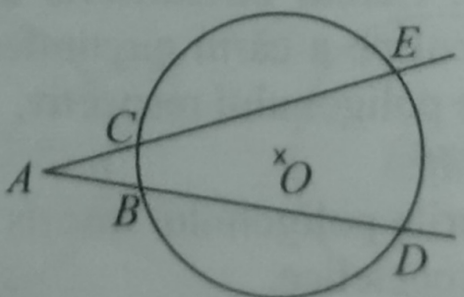
$m(\sphericalangle ABC) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AC}) + m(\overset{\frown}{FG})}{2}$;



Unghi exterior:

• cu vârful în exteriorul cercului

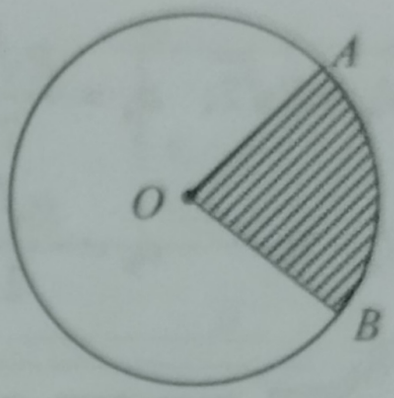
$m(\sphericalangle CAB) = \dfrac{m(\overset{\frown}{DE}) - m(\overset{\frown}{BC})}{2}$.



Formule

Lungimea cercului (l): $l = 2\pi R$

Aria cercului (S): $S = \pi R^2$, $\pi = 3{,}1416\ldots$



Lungimea arcului: $l_{\overset{\frown}{AB}} = \dfrac{\pi R n}{180^\circ}$,

n – măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$ în grade.

Aria sectorului: $S_{AOB} = \dfrac{\pi R^2 n}{360^\circ}$, n – măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$ în grade.

POLIGOANE

Proprietăți:

1. Suma unghiurilor unui poligon este $180^\circ(n - 2)$, unde n este numărul de laturi.
2. Poligoanele pot fi concave sau convexe.
3. Un poligon convex cu toate laturile şi unghiurile egale se numeşte regulat.

Poligonul regulat

Proprietăți:

1. Măsura unghiurilor poligonului regulat este $180^\circ(n - 2)/n$.
2. Raza cercului înscris este perpendiculara din O pe o latură şi se numeşte apotemă (a). Apotema este distanţa de la centrul poligonului la fiecare dintre laturile lui.
3. Aria = $1/2 \cdot n \cdot$ latură $\cdot$ apotemă.
4. Relaţia dintre latura poligonului regulat (l), apotema sa (a) şi raza cercului circumscris R este: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + a^2 = R^2$.

Formule:

$$l_3 = R\sqrt{3};\quad a_3 = \frac{R}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{6};\quad \mathcal{A}_3 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4};$$

$l_4 = R\sqrt{2}$; $a_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} = \dfrac{l}{2}$; $\mathcal{A}_4 = 2R^2 = l^2$;

$l_6 = R$; $a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$; $\mathcal{A}_6 = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3l^2\sqrt{3}}{2}$.

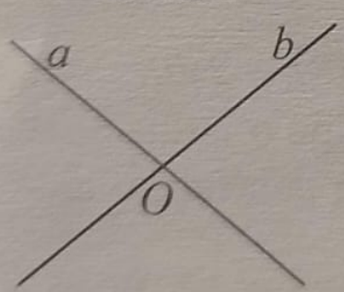
PUNCTE, DREPTE, PLANE

1. Prin două puncte distincte trece o dreaptă şi numai una; orice dreaptă are cel puţin două puncte distincte.
2. *Postulatul lui Euclid:* Într-un plan, printr-un punct A, exterior unei drepte d, se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă şi numai una.
3. Dacă două puncte distincte ale unei drepte sunt conţinute într-un plan, atunci toate punctele dreptei sunt conţinute în acel plan.
4. Două drepte paralele cu o a treia dreaptă sunt paralele între ele.

$$a \parallel d, b \parallel d \Rightarrow a \parallel b$$

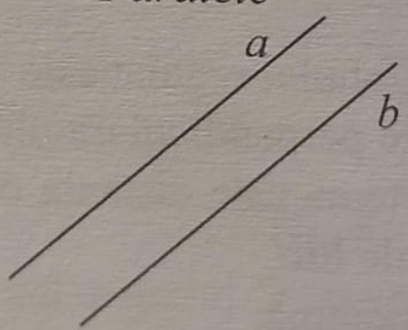
Poziţiile relative a două drepte în spaţiu

Concurente



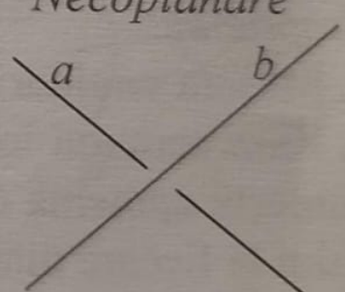
$a \cap b = \{O\}$

Paralele



$a \cap b = \varnothing; a \parallel b$

Necoplanare

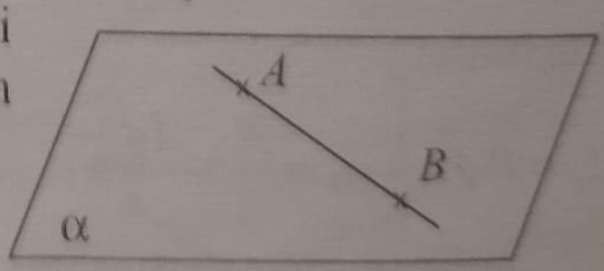


$a \cap b = \varnothing; a \nparallel b$

Poziţiile relative ale unei drepte faţă de un plan

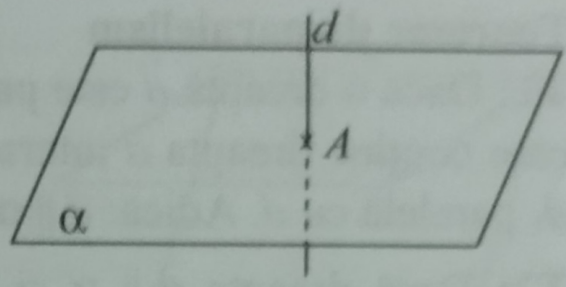
1. O dreaptă poate avea două sau mai multe puncte comune cu un plan (dreapta este conţinută în plan).

$$A, B \subset \alpha$$



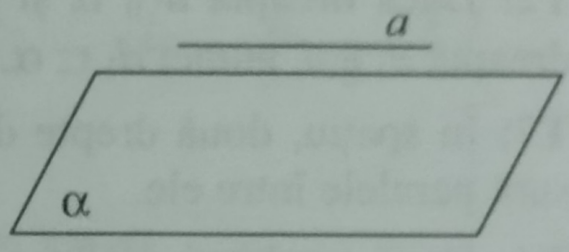
2. O dreaptă poate avea un singur punct comun cu un plan (dreapta înţeapă planul).

$$d \cap \alpha = A$$



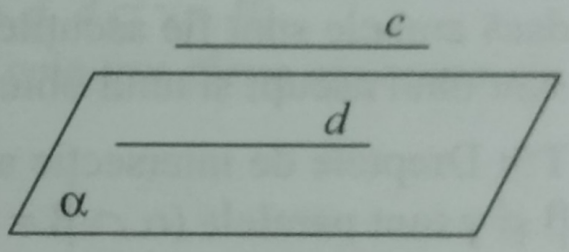
3. O dreaptă poate să nu aibă niciun punct comun cu planul (dreapta este paralelă cu planul).

$$a \cap \alpha = \varnothing;\ a \parallel \alpha$$



Teoremă: O dreaptă paralelă cu o dreaptă din plan este paralelă cu planul.

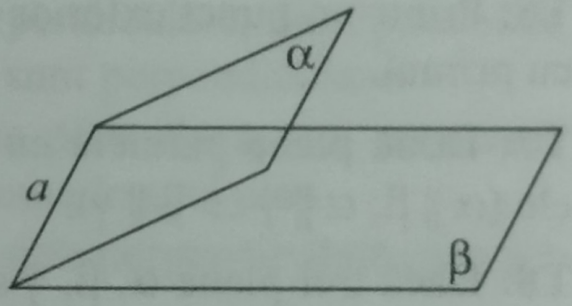
$$\left.\begin{array}{l} c \parallel d \\ d \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow c \parallel \alpha$$



Poziţiile relative a două plane

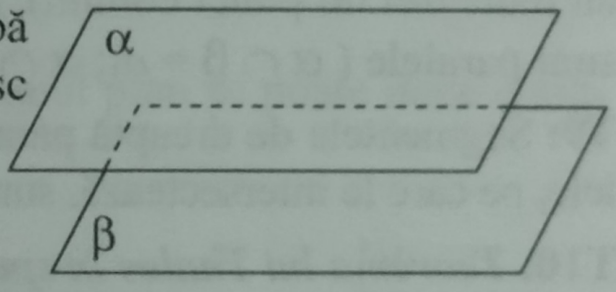
1. Două plane distincte pot avea o dreaptă comună şi numai una.

$$\alpha \cap \beta = a$$



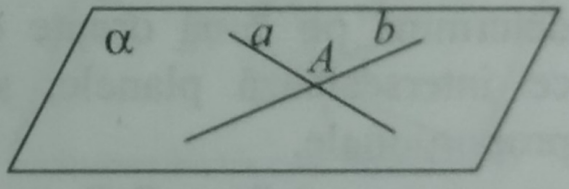
2. Două plane distincte pot să nu aibă niciun punct comun; ele se numesc plane paralele.

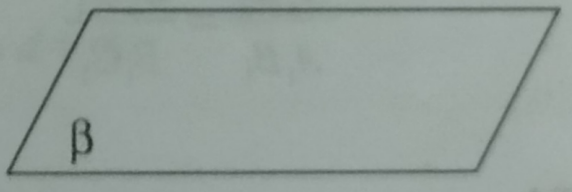
$$\alpha \cap \beta = \varnothing;\ \alpha \parallel \beta$$



Teoremă: Dacă un plan conţine două drepte concurente, paralele cu un alt plan, atunci cele două plane sunt paralele.

$$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha;\ b \subset \alpha \\ a \cap b = \{A\} \\ a \parallel \beta;\ b \parallel \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta$$





Teoreme de paralelism

T1: Dacă o dreaptă d este paralelă cu un plan α, oricare alt plan β care conţine dreapta d intersectează primul plan α după o dreaptă d_1 paralelă cu d. Adică: $d \parallel \alpha, d \subset \beta, \alpha \cap \beta = d_1 \Rightarrow d_1 \parallel d$.

T2: Dacă dreapta $d \parallel \alpha$ şi printr-un punct P, $P \in \alpha$ se duce o dreaptă $d_1 \parallel d$, atunci $d_1 \subset \alpha$.

T3: În spaţiu, două drepte distincte, paralele cu o a treia dreaptă sunt paralele între ele.

T4: Două unghiuri cu laturile respectiv paralele sunt congruente dacă ambele sunt fie ascuţite, fie obtuze şi sunt suplementare dacă sunt unul ascuţit şi unul obtuz.

T5: Dreptele de intersecţie ale unui plan α cu două plane paralele β şi γ sunt paralele ($\alpha \cap \beta = d_1, \alpha \cap \gamma = d_2, \beta \parallel \gamma \Rightarrow d_1 \parallel d_2$).

T6: Printr-un punct exterior unui plan trece un singur plan paralel cu primul.

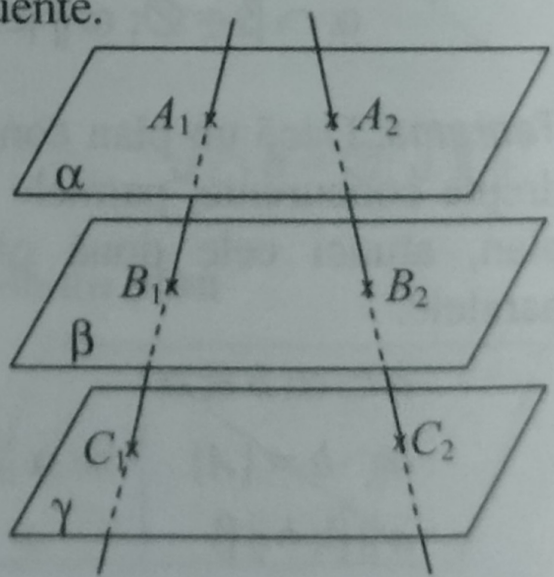
T7: Două plane paralele cu un al treilea plan sunt paralele între ele ($\alpha \parallel \beta; \alpha \parallel \gamma \Rightarrow \beta \parallel \gamma$).

T8: Dacă trei plane α, β, γ se intersectează două câte două (şi nu au toate trei un punct comun), atunci cele trei drepte de intersecţie sunt paralele ($\alpha \cap \beta = d_1; \alpha \cap \gamma = d_2; \beta \cap \gamma = d_3 \Rightarrow d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$).

T9: Segmentele de dreaptă paralele, cuprinse între două plane paralele, pe care le intersectează, sunt congruente.

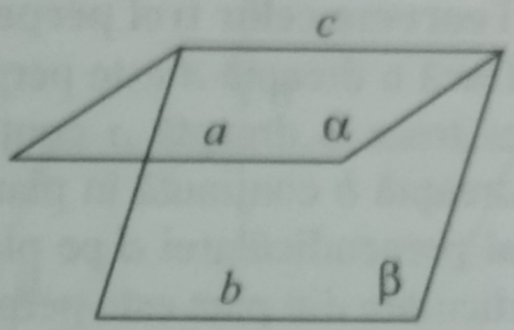
T10: *Teorema lui Thales în spaţiu:*
Trei sau mai multe plane paralele determină pe două drepte oarecare, ce intersectează planele, segmente proporţionale.

$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{B_2C_2}{B_1C_1}$$



T11: Teoremă ajutătoare:

$$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha \\ b \subset \beta \\ a \parallel b \\ \alpha \cap \beta = c \end{array}\right\} \Rightarrow c \parallel a \parallel b$$



Poziţiile relative a trei plane

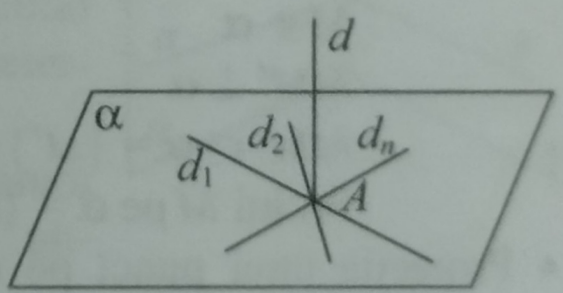
1. Concurente după o dreaptă ($\alpha \cap \beta \cap \gamma = d$).
2. Au un singur punct comun ($\alpha \cap \beta = d$, $d \subset \gamma = P$).
3. Paralele două câte două, deci toate cele trei plane sunt paralele (nu au niciun punct comun).

Perpendicularitate în spaţiu

- Două drepte în spaţiu se numesc perpendiculare, dacă paralelele duse dintr-un punct oarecare P, la ele, sunt perpendiculare.
- O dreaptă este perpendiculară pe un plan, dacă este perpendiculară pe două drepte neparalele conţinute în acel plan.
- O dreaptă perpendiculară pe un plan este perpendiculară pe orice dreaptă din acel plan.

Teorema 1: Dintr-un punct exterior unui plan se poate duce o singură perpendiculară pe acel plan.

Teorema 2: Locul geometric al punctelor dreptelor $d_1, d_2, \ldots, d_n$ care trec printr-un punct A al unei drepte d şi sunt perpendiculare pe aceasta este planul α perpendicular pe dreapta d şi care trece prin punctul A.



$d_1, d_2, \ldots, d_n \perp d$; $d_1 \cap d_2 \cap \ldots \cap d_n \cap d = A$;

$d_1, d_2, \ldots, d_n \subset \alpha \Rightarrow \alpha \perp d$.

Teorema celor trei perpendiculare

Dacă o dreaptă d este perpendiculară pe un plan α şi prin piciorul ei trece o dreaptă a conţinută în plan, perpendiculară pe o altă dreaptă b conţinută în plan, o dreaptă c care uneşte orice punct M al perpendicularei d pe plan cu intersecţia P a celor două perpendiculare din plan este perpendiculară pe a treia dreaptă b.

$d \perp \alpha, d \cap \alpha = \{A\}$

$a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \perp b, M \in d$

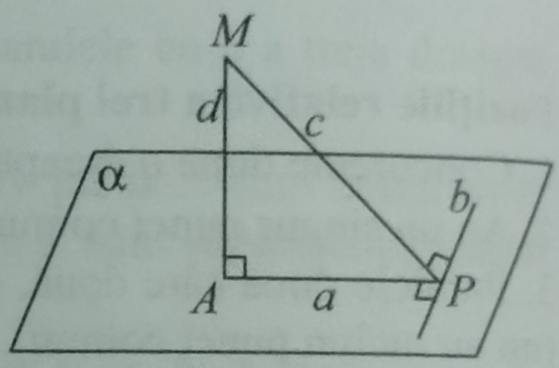
$a \cap b = \{P\} \Rightarrow MP \perp b, c \perp b$

Reciproca 1:

$d \perp \alpha, a \subset \alpha, b \subset \alpha, c \perp b \Rightarrow a \perp b$

Reciproca 2:

$d \perp a, c \perp b, a \perp b, a, b \subset \alpha \Rightarrow d \perp \alpha$



Teoreme de perpendicularitate

• Distanţa sau depărtarea unui punct M faţă de un plan α este egală cu lungimea perpendicularei din M pe α.

• Distanţa dintre două plane paralele este egală cu lungimea segmentului de dreaptă perpendicular pe plane şi cuprins între ele.

Proiecţii

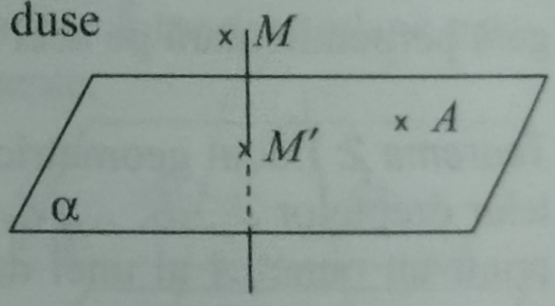
• Proiecţia unui punct pe o dreaptă sau pe un plan este piciorul perpendicularei duse din acel punct pe dreaptă sau pe plan.

$M \notin \alpha$

$MM' \perp \alpha$

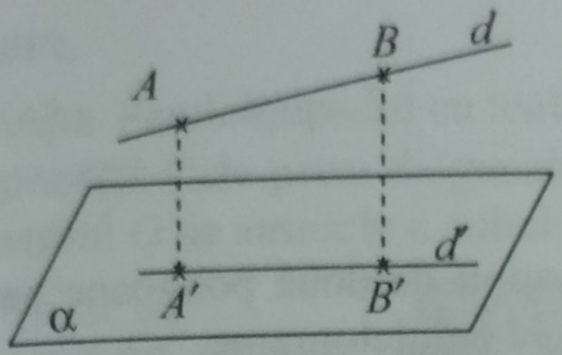
$MM' \cap \alpha = \{M'\}$

Pr. lui M pe $\alpha = \{M'\}$

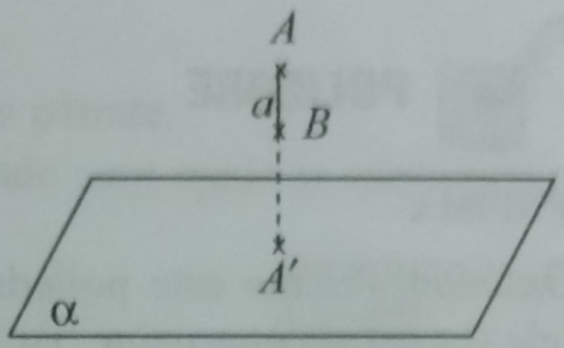


• Proiecţia unui punct pe un plan este piciorul perpendicularei duse prin punct pe plan.

• Proiecţia unei drepte pe un plan este o dreaptă sau un punct atunci când dreapta este perpendiculară pe plan.

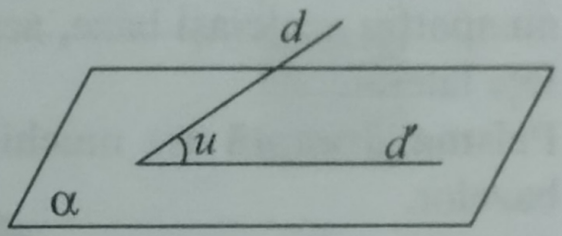


Pr. lui AB pe $\alpha = A'B'$



Pr. lui a pe $\alpha = \{A'\}$

• Unghiul unei drepte cu un plan este unghiul făcut de dreaptă cu proiecţia ei pe plan. (Este cel mai mic dintre unghiurile formate de acea dreaptă cu o dreaptă oarecare din plan şi concurentă cu ea.)



$\sphericalangle(d, \alpha) = \sphericalangle(d, d')$;
Pr. lui d pe $\alpha = d'$

• Aria proiecţiei unui triunghi pe un plan este egală cu produsul dintre aria triunghiului şi cosinusul unghiului format de planul triunghiului cu planul pe care proiectăm.

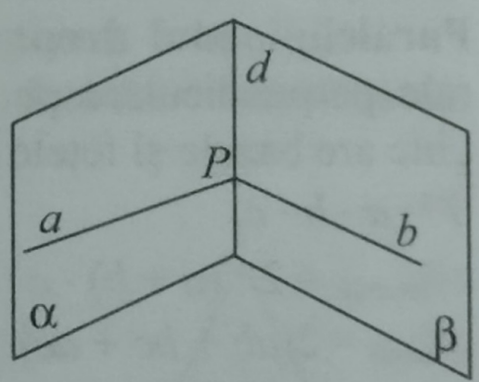
$$\mathcal{A}_{A'B'C'} = \mathcal{A}_{ABC} \cdot \cos a$$

Unghiul dintre două plane. Unghiul diedru

• Unghiul diedru este determinat de două plane concurente astfel: $\alpha \cap \beta = d$, $a \in \alpha$, $b \in \beta$, $a \perp d$ şi $b \perp d \Rightarrow a \cap b = P$.

• Unghiul plan corespunzător unghiului diedru este unghiul cu vârful în P determinat de dreptele a şi b.

• Măsura unui unghi diedru este măsura oricărui unghi plan corespunzător unghiului diedru.



POLIEDRE

PRISMA

Definiție: Prisma este poliedrul mărginit de două poligoane paralele (baze) şi congruente, iar lateral de paralelograme.

Notații: Înălţimea prismei este distanţa dintre baze.

Diagonala prismei este segmentul determinat de două vârfuri ce nu aparţin aceleiaşi baze, aceleiaşi muchii laterale şi nici aceleiaşi feţe laterale.

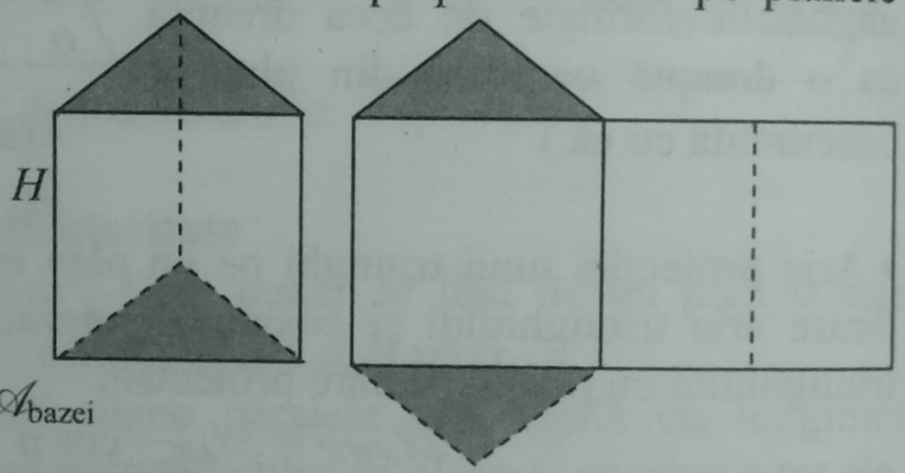
Prisma dreaptă are muchiile laterale perpendiculare pe planele bazelor.

$\mathcal{V} = S_{\text{bazei}} \cdot H$

$\mathcal{A}_{\text{laterală}} = P \cdot H$

P – perimetrul poligonului de bază

$\mathcal{A}_{\text{totală}} = \mathcal{A}_{\text{laterală}} + 2 \cdot \mathcal{A}_{\text{bazei}}$



PARALELIPIPEDUL

Definiție: Prisma cu bazele paralelograme.

Paralelipipedul drept este paralelipipedul ce are muchiile laterale perpendiculare pe planele bazelor. Paralelipipedul dreptunghic are bazele şi feţele laterale dreptunghiuri.

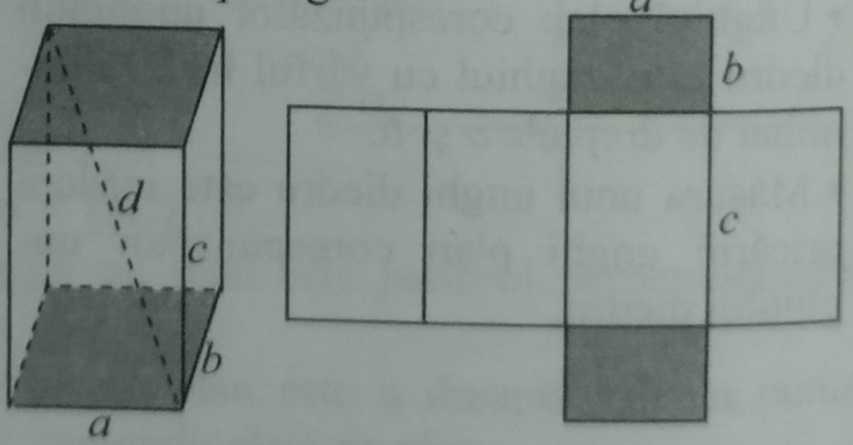
$\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c$

$\mathcal{A}_{\text{laterală}} = 2 \cdot (a + b) \cdot c$

$\mathcal{A}_{\text{totală}} = 2(ab + bc + ac)$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

d – diagonala



CUBUL

Definiție: Paralelipipedul cu toate fețele pătrate.

Proprietăți: Cele patru diagonale ale sale sunt egale și concurente în centrul O de simetrie a cubului.

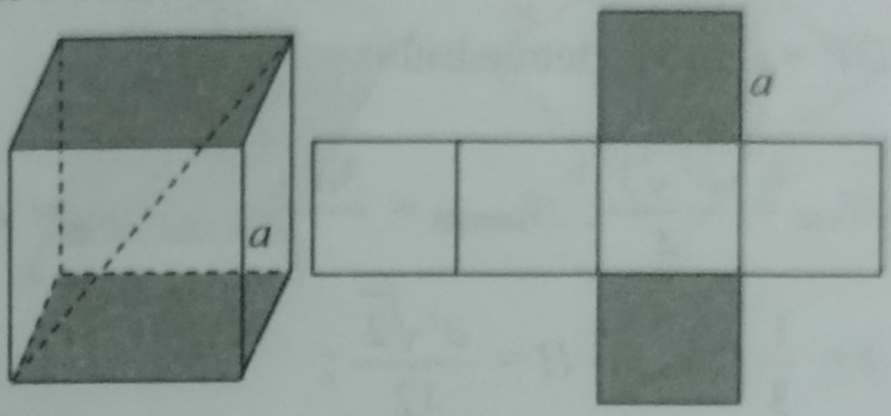
$\mathcal{V} = a^3$

$\mathcal{A}_{\text{laterală}} = 4a^2$

$\mathcal{A}_{\text{totală}} = 6a^2$

$d = a\sqrt{3}$

d – diagonala



Rapoarte de asemănare

Fie două figuri asemenea, iar $k = \frac{l}{L}$ raportul lor de asemănare $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} = k^2$ (raportul ariilor celor două figuri)

$\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} = k^3$ (raportul volumelor)

TETRAEDRUL

Definiție: Poligonul cu patru fețe, toate triunghiuri.

Înălțimea (H) – perpendiculara din vârf pe o față considerată bază.

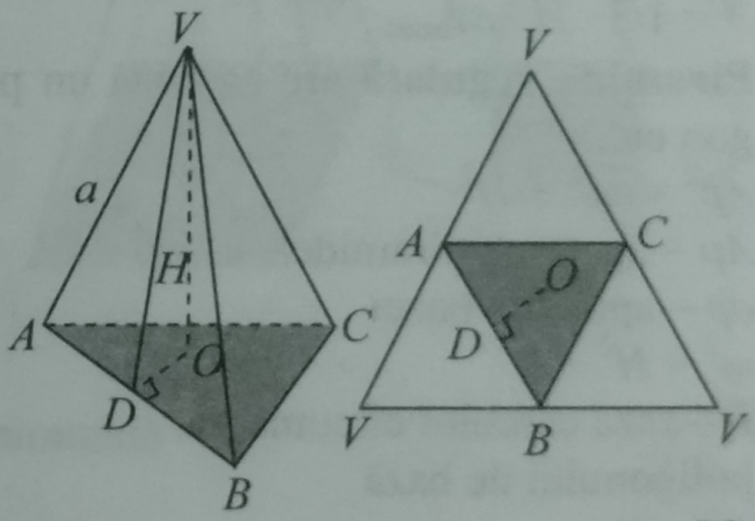
$\mathcal{A}_{\text{laterală}}$ = suma ariilor fețelor laterale

$\mathcal{A}_{\text{totală}} = \mathcal{A}_{\text{laterală}} + \mathcal{A}_{\text{bazei}}$

$\mathcal{V} = 1/3 \cdot H \cdot A_{\text{bazei}}$

Tetraedrul regulat are toate muchiile congruente.

OD = apotema bazei $= \frac{a\sqrt{3}}{6}$



$$VO = H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

H – înălţimea tetraedrului

DV = apotema tetraedrului = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\mathcal{A}_{\text{feţei}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad \mathcal{A}_{\text{laterală}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}; \quad \mathcal{A}_{\text{totală}} = a^2\sqrt{3};$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \cdot \mathcal{A}_{\text{bazei}} \cdot H = \frac{a^3\sqrt{2}}{12};$$

$$a = 2\sqrt{6} \cdot r = \frac{2\sqrt{6}}{3} \cdot R;$$

r – raza sferei înscrise în tetraedru;
R – raza sferei circumscrise tetraedrului.

PIRAMIDA

Definiţie: Figura geometrică ce are ca bază un poligon, iar ca feţe laterale triunghiuri.
Muchia laterală (m) – uneşte vârful piramidei cu un vârf al bazei.
Înălţimea (H) – perpendiculara din vârful piramidei pe bază.
$\mathcal{A}_{\text{laterală}}$ = suma ariilor feţelor laterale
$\mathcal{A}_{\text{totală}} = \mathcal{A}_{\text{laterală}} + \mathcal{A}_{\text{bazei}}$
$\mathcal{V} = 1/3 \cdot H \cdot \mathcal{A}_{\text{bazei}}$
Piramida regulată are ca bază un poligon regulat (pătrat, hexagon etc.)
$Ap^2 = ap^2 + H^2$
Ap – apotema piramidei
ap – apotema bazei
$m^2 = H^2 + R^2$
R – raza cercului circumscris poligonului de bază

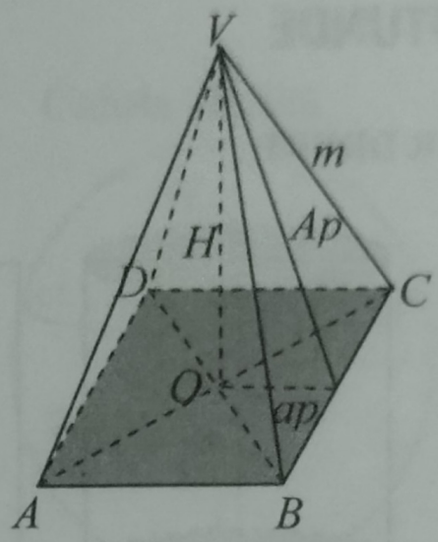
$$\mathcal{A}_{\text{laterală}} = \frac{P \cdot Ap}{2}$$

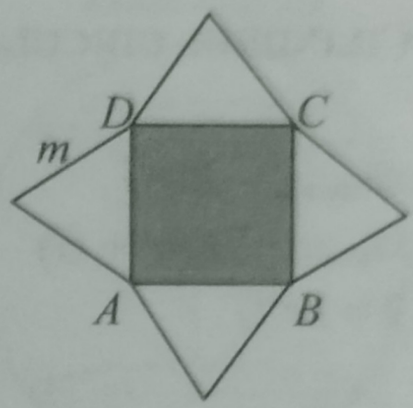
$$\mathcal{A}_{\text{totală}} = \frac{P(Ap + ap)}{2}$$

P – perimetrul bazei

$\mathcal{V} = 1/3 \cdot \mathcal{A}_b \cdot H$

$\mathcal{A}_b$ – aria bazei





TRUNCHIUL DE PIRAMIDĂ

Definiție: Partea dintr-o piramidă cuprinsă între bază şi o secţiune făcută de un plan paralel cu baza.

baza mică ~ baza mare

$\mathcal{A}_{\text{laterală}}$ = suma ariilor feţelor laterale

$\mathcal{A}_{\text{totală}} = \mathcal{A}_{\text{laterală}} + \mathcal{A}_{\text{bazelor}}$

$$\mathcal{V} = 1/3 \cdot H \cdot (\mathcal{A}_b + \mathcal{A}_B + \sqrt{\mathcal{A}_b \cdot \mathcal{A}_B}),$$

$\mathcal{A}_b$ – aria bazei mici, $\mathcal{A}_B$ – aria bazei mari.

Trunchiul de piramidă regulată provine dintr-o piramidă regulată.

$$\mathcal{A}_{\text{laterală}} = \frac{(P + p) \cdot Ap}{2}$$

P – perimetrul bazei mari

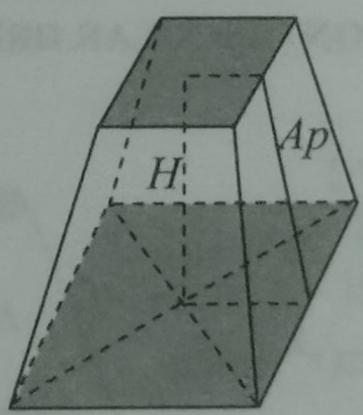
p – perimetrul bazei mici

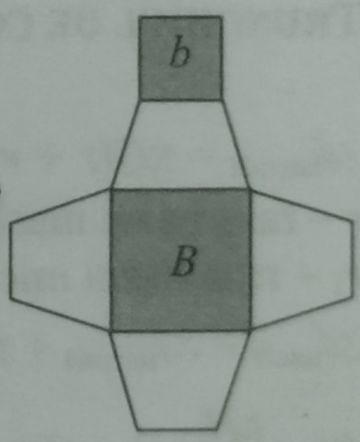
Ap – apotema tr. de piramidă

$\mathcal{A}_{\text{totală}} = \mathcal{A}_{\text{laterală}} + \mathcal{A}_b + \mathcal{A}_B$

$$\mathcal{V} = \frac{H}{3}\left(\mathcal{A}_b + \mathcal{A}_B + \sqrt{\mathcal{A}_b \cdot \mathcal{A}_B}\right)$$

H – înălţimea trunchiului de piramidă





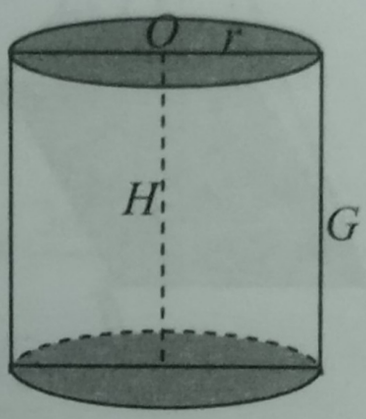
CORPURI ROTUNDE

CILINDRUL CIRCULAR DREPT

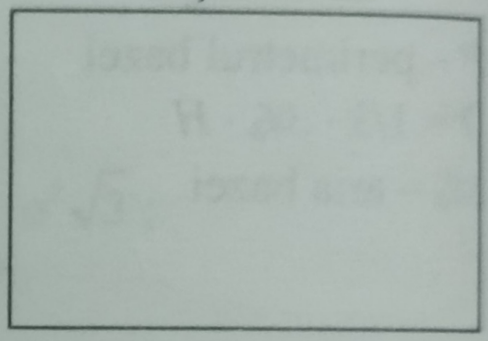
$\mathcal{A}_{\text{laterală}} = 2\pi rG$

$\mathcal{A}_{\text{totală}} = 2\pi r(r + G)$

$\mathcal{V} = \pi r^2 G$



Faţa laterală

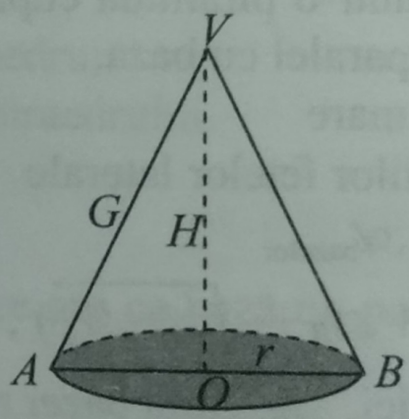


CONUL CIRCULAR DREPT

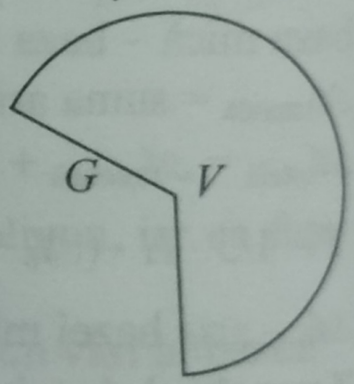
$\mathcal{A}_{\text{laterală}} = \pi rG$

$\mathcal{A}_{\text{totală}} = \pi r(r + G)$

$\mathcal{V} = \dfrac{\pi r^2 H}{3}$



Faţa laterală



TRUNCHIUL DE CON CIRCULAR DREPT

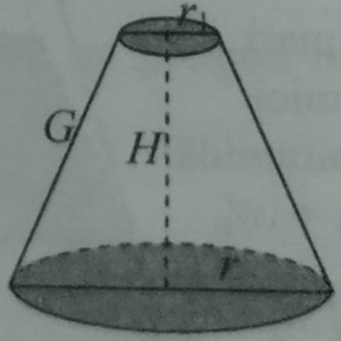
$\mathcal{A}_{\text{laterală}} = \pi G(r + r_1)$

r – raza bazei mari

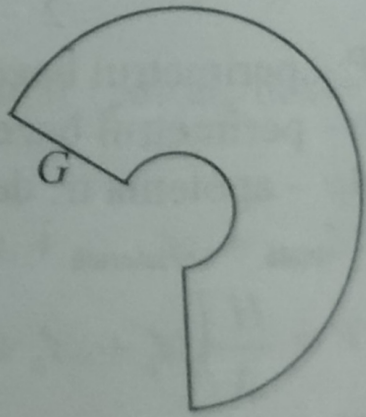
r_1 – raza bazei mici

$\mathcal{A}_{\text{totală}} = \mathcal{A}_{\text{laterală}} + \pi(r^2 + r_1^2)$

$\mathcal{V} = \dfrac{\pi H}{3}(r^2 + r_1^2 + r \cdot r_1)$



Faţa laterală



SFERA

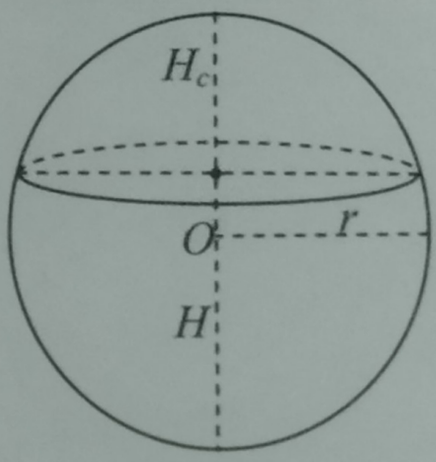
$\mathcal{A}_{\text{sferei}} = 4\pi r^2$

$\mathcal{A}_{\text{calotei}} = 2\pi r H_c$

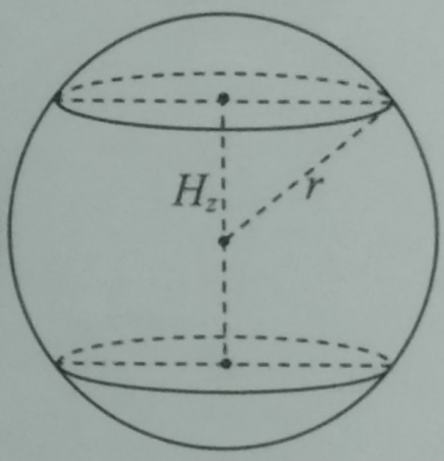
$\mathcal{A}_{\text{zonei sferice}} = 2\pi r H_z$

$\mathcal{V}_{\text{sferei}} = \dfrac{4\pi r^3}{3}$

Calota sferică



Zona sferică

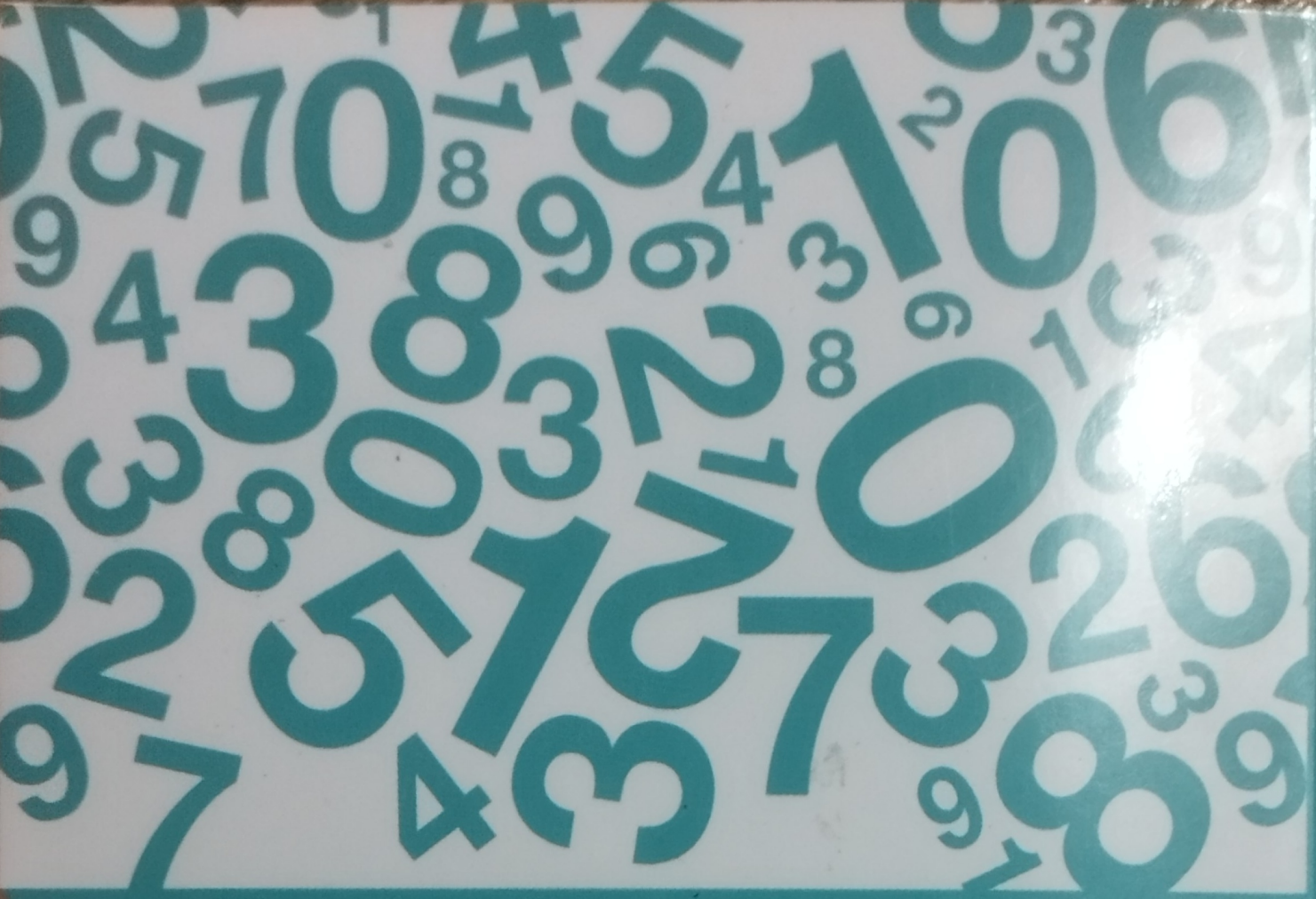


COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparalela45.ro

www.edituraparalela45.ro

Tipografia ARTPRINT



Concepută în format de buzunar, lucrarea se adresează elevilor claselor 5-8, reprezentând atât un suport teoretic bine sistematizat, necesar în pregătirea de zi cu zi a orelor de matematică, cât și unul informațional, de bază pentru pregătirea evaluărilor curente și a examenului de evaluare națională.

Memoratorul respectă conținutul programelor școlare de matematică pentru gimnaziu și asigură un mod mai ușor de însușire a conținuturilor obligatorii.

ISBN 978-973-47-4166-3

EDITURA PARALELA 45
EDUCAȚIONAL